ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Факультативный курс 10

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

10 КЛАСС

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС

Под редакцией *В. В. Фирсова*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1980

ББК 22.1я72
И 32

А. М. Абрамов, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев,
А. А. Егоров, А. Н. Земляков, А. Г. Мордкович

Составитель: *С. И. Шварцбурд*

Рекомендовано к печати
Главным управлением школ МП СССР

И32 **Избранные вопросы математики:** 10 кл. Факультативный курс/А. М. Абрамов, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. С. И. Шварцбурд.— М.: Просвещение, 1980.— 191 с.

Книга содержит теоретический материал и упражнения по темам факультативного курса по математике для десятого класса.

И $\frac{60601-841}{103(03)-80}$ инф. письмо

ББК 22.1я72
51(075)

© Издательство «Просвещение», 1980 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Дифференциальные уравнения 5

§ 1. Показательный рост и процессы выравнивания . . . . . —
§ 2. Основные понятия, связанные с дифференциальными уравнениями 12
§ 3. Составление дифференциальных уравнений 18
§ 4. Решение дифференциальных уравнений 32

Комплексные числа и многочлены 61

§ 1. Зачем нужны комплексные числа . . . . . —
§ 2. Многочлены 66
§ 3. Комплексные числа 84
§ 4. Применения комплексных чисел 122

Элементы сферической геометрии 154

§ 1. Начальные понятия сферической геометрии 155
§ 2. Соответствие между сферической геометрией и планиметрией . . 159
§ 3. Сферическая тригонометрия 161
§ 4. Перемещение сферы 166
§ 5. Площади сферических многоугольников и формула Эйлера . . . 172
§ 6. Применения сферической геометрии в навигации 176
§ 7. Картографические проекции 181

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — третья в цикле учебных пособий по факультативному курсу «Избранные вопросы математики». Содержание пособия соответствует программе факультативных курсов, утвержденной Министерством просвещения СССР.

В программу факультативного курса для 10 класса входят 3 темы: «Дифференциальные уравнения», «Комплексные числа и многочлены», «Элементы сферической геометрии». Первые две темы считаются основными, третья — дополнительной. Основные темы рекомендуется изучать в первую очередь. В настоящее учебное пособие включены материалы по всем трем темам.

Тема «Дифференциальные уравнения» углубляет материал курса начал анализа 9—10 классов. Основная цель изучения — показать учащимся, что дифференциальные уравнения являются одним из основных орудий математического естествознания, т. е. познакомить их с математическим моделированием реальных процессов методом дифференциальных уравнений. Поэтому не следует уделять много внимания различным способам решения конкретных типов дифференциальных уравнений. Важно разобраться в геометрической интерпретации уравнений первого порядка и показать, как составляются дифференциальные уравнения, отправляясь от естественнонаучных примеров. Решение ряда важных в прикладном плане дифференциальных уравнений рекомендуется проводить подбором с последующим подробным обсуждением физического смысла полученных ответов. Статья «Дифференциальные уравнения» содержит избыточный материал. Выбор материала для проведения занятий — дело вкуса учителя. Однако в любой вариант содержания занятий должны обязательно войти пункты 1—6, 8 (вводная часть и пример 1), 13—17, 20, 25. От наличия времени и состава учащихся зависит, какие еще линии включит учитель в свой факультатив. Этих линий несколько; они прослеживаются в следующих пунктах: 1) 9; 2) 10 и 24; 3) 11 и 19; 4) 12 и 23; 5) 7; 6) 8, 18, 21 и 22. Любая из этих линий может быть исключена без ущерба для основного содержания; каждую из них можно предложить учащимся для подготовки самостоятельных выступлений. При этом в обязательных пунктах можно рассмотреть лишь часть задач.

Тема «Комплексные числа и многочлены» углубляет и расширяет знания учащихся о числовых системах и о решении алгебраических уравнений. При этом основное внимание уделяется приложениям теории комплексных чисел. Рассматриваются также и некоторые «внутренние» вопросы теории комплексных чисел, в том числе показательная, логарифмическая и тригонометрические функции комплексного переменного. Содержание статьи «Комплексные числа и многочлены» не может полностью быть уложено в часы, отведенные для изучения этой темы. Предполагается, что учитель сосредоточит внимание уча-

щихся на тех или иных вопросах в зависимости от их интересов и уровня подготовки. Однако в любом случае следует продемонстрировать учащимся возможности применения теории комплексных чисел к решению задач, близких к школьному курсу. Для этого в статье приведен ряд задач с решениями. Учащиеся должны овладеть теорией настолько, чтобы понимать приведенные решения и уметь решать задачи аналогичного содержания. Для повышения общего уровня математической культуры учащихся, для расширения их математического кругозора следует подробно рассмотреть вопросы прикладного характера из § 4, причем не все, а некоторые — по выбору учителя. Остальной материал из § 4 можно предложить для индивидуального чтения наиболее интересующимся математикой учащимся. С целью пробудить у учащихся интерес к вопросам не узко математического, а более широкого, логического и методологического характера полезно остановиться на «тонкостях» построения теории комплексных чисел, рассмотренных в пункте 1 § 3. С другой стороны, в случае нехватки времени эти «тонкости» можно опустить.

Тема «Сферическая геометрия» знакомит учащихся с основными понятиями и некоторыми результатами, относящимися к геометрии сферы. Содержание статьи «Сферическая геометрия» непосредственно связано с программным материалом: в ходе изложения повторяются сведения, известные учащимся из курса геометрии, находят применение теоремы стереометрии, получают развитие сведения о перемещениях пространства. Доказанные в статье теоремы сферической геометрии позволяют ознакомить учащихся с некоторыми красивыми фактами — теоремой Эйлера о многогранниках, невозможностью изометрического отображения сферы на плоскость и др. Содержащиеся в статье сведения о геометрии сферы дают возможность убедительно показать ее практические применения: в заключительных параграфах решаются простейшие задачи навигации и картографии, дается представление о некоторых картографических проекциях.

Материал по каждой теме содержит большое (избыточное) количество задач. Ввиду ограниченности объема в пособие не включен специальный раздел, посвященный задачам повышенной трудности по общему курсу математики; этот материал учитель сможет почерпнуть из задачников, выпущенных издательством «Просвещение» в серии «Библиотека учителя математики». Выбор задач для решения на факультативных занятиях предоставляется учителю, который знает уровень подготовки и интересы своих учеников.

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ РОСТ И ПРОЦЕССЫ ВЫРАВНИВАНИЯ

1. Равномерные и неравномерные процессы. Процессы, протекающие в окружающем нас мире, характеризуются взаимосвязанностью величин, определяющих эти процессы. Математическим выражением этой взаимосвязи является понятие функциональной зависимости. Например, путь s, пройденный падающим телом, является функцией от времени t, которое прошло с начала падения: $s=f(t)$. Зависимость s от t весьма сложна — надо учитывать сопротивление воздуха, которое, в свою очередь, зависит от величины атмосферного давления, температуры, от массы, формы и размеров падающего тела и многих других причин.

Чтобы упростить задачу, сначала рассматривают приближенную модель явления, заменяя падающее тело материальной точкой, что позволяет вывести за рамки исследуемой задачи его форму и размеры. Если, кроме того, предположить, что сопротивление воздуха отсутствует, то закон падения примет, как известно, сравнительно простой вид: $s=\frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Но эта упрощенная формула неприменима ко многим практически важным процессам. Например, по ней нельзя рассчитать процесс падения парашютиста (поскольку здесь существенную роль играет сопротивление воздуха), процесс возвращения посланной к Луне межпланетной станции (из-за того, что сила притяжения зависит от расстояния до Земли) и т. д.

Таким образом, реально протекающие процессы слишком сложны для того, чтобы непосредственно применять к ним математические методы, а слишком упрощенные схемы явлений дают результаты, весьма далекие от истины. Чтобы справиться с этой трудностью, строят для данного процесса несколько математических моделей, позволяющих со все большей точностью описать изучаемое явление, получить ответы, которые потом можно сравнить с результатами экспериментов, и выяснить, какая модель дает ответы, достаточно близкие к истине, и в то же время достаточно проста для дальнейшего изучения.

Одним из самых упрощающих является предположение о равномерности изучаемого процесса. Так, почти во всех школьных задачах на движение скорости движущихся тел считаются по-

стоянными. Если некоторая величина y меняется равномерно и в момент времени $t_0=0$ она имела значение y_0, а в момент времени $t=t_1$ — значение y_1, то ее значение в произвольный момент времени t выражается формулой

$$y=y_0+(y_1-y_0)\,\frac{t}{t_1}.$$

Следующими по сложности после процессов с постоянной скоростью являются процессы, для которых постоянно ускорение, — сюда относится, в частности, свободное падение тела вблизи земной поверхности. В этом случае скорость v изменяется равномерно — в момент времени t она равна v_0+at, где v_0 — начальная скорость (т. е. скорость в момент времени $t=0$), a — ускорение. Закон изменения самой величины y за промежуток времени $[t_0, t]$ выражается, как показано в пособии «Алгебра и начала анализа, 10», интегралом $\int\limits_{t_0}^{t} v(t)\,dt$. Значит, в нашем примере имеем:

$$y(t)-y(0)=\int\limits_0^t (v_0+at)\,dt=v_0t+\frac{at^2}{2},$$

т. е.

$$y=y_0+v_0t+\frac{at^2}{2},\ \text{где } y_0=y(0).$$

В разобранных примерах скорость была либо постоянна, либо менялась равномерно, но она не зависела от значения самой меняющейся величины. Однако часто значение скорости изменения величины связано со значением величины. Например, чем больше величина вклада в сберкассе, тем больше прирост за год; чем больше стадо коров, тем больше приплода будет за год, и т. д. Во многих случаях можно в первом приближении принять, что скорость изменения величины в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Мы приходим, таким образом, к следующей математической задаче.

Задача. *Скорость изменения v величины y в каждый момент времени пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Найти значение y в момент времени t, если при $t=0$ значение этой величины равнялось y_0.*

Решение. По условию задачи имеем: $v=ky$. Так как $v=y'$, то получаем дифференциальное уравнение

$$y'=ky. \qquad (1)$$

В пособии «Алгебра и начала анализа, 10» показано, что этому уравнению удовлетворяют функции вида $y=Ce^{kt}$ и только они.

По условию если $t=0$, то $y=y_0$. Значит, $y_0=Ce^{k\cdot 0}$, т. е. $C=y_0$. Таким образом, значение y выражается формулой

$$y=y_0e^{kt}. \qquad (2)$$

Если значение коэффициента пропорциональности k не дано, а известно, что при $t=t_1$ значение величины равнялось y_1, то $y_1=y_0e^{kt_1}$, и потому

$$y=y_0e^{kt}=y_0(e^{kt_1})^{\frac{t}{t_1}}=y_0\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{t}{t_1}}.$$

Это значение отличается от значения $y=y_0+(y_1-y_0)\cdot\frac{t}{t_1}$, полученного выше в предположении, что скорость изменения y постоянна.

Если задать любые числа t_0 и y_0, то всегда найдется одно и только одно решение дифференциального уравнения (1), принимающее при $t=t_0$ значение y_0, а именно решение $y=y_0e^{k(t-t_0)}$, или, иначе, $y=y_0e^{-kt_0}\cdot e^{kt}$. Таким образом, уравнение (1) вместе с начальным условием $y(t_0)=y_0$ однозначно определяет решение.

Заметим, что процессы разобранного вида можно приближенно свести к процессам, у которых скорость постоянна. Для этого разобьем отрезок $[0; t]$ на n равных частей и будем считать, что скорость изменения величины y постоянна на каждом из этих отрезков. На отрезке $\left[0; \frac{t}{n}\right]$ находим эту скорость по формуле $v=y'=ky$, учитывая, что при $t_0=0$ имеем $y=y_0$. Получаем, что $v_0=ky_0$. Это позволяет найти приближенное значение y в точке $\frac{t}{n}$ — оно равно $y_0+v_0\frac{t}{n}=y_0+ky_0\cdot\frac{t}{n}$, т. е. $y_1=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)$. Вновь используя формулу (1), находим приближенное значение скорости при $t_1=\frac{t}{n}$ — оно равно $v_1=ky_1=ky_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)$. Но тогда в момент времени $t_2=\frac{2t}{n}$ значение y равно $y_2=y_1+v_1\cdot\frac{t}{n}=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)+ky_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)\frac{t}{n}$, т. е. $y_2=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^2$. Таким же путем устанавливаем, что значение y при $t_m=\frac{mt}{n}$ равно $y_m=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^m$. В частности, это значение при $m=n$, т. е. в момент времени t, равно $y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$.

Описанный метод является лишь приближенным, поскольку мы считаем скорость изменения y постоянной на каждом из от-

резков $\left[\frac{mt}{n}, \frac{(m+1)t}{n}\right]$. Но при увеличении числа этих отрезков длина каждого из них уменьшается, а потому делаемая на каждом шагу ошибка становится все меньше. Можно доказать, что в результате и общая ошибка стремится к нулю, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty} y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n = y_0 e^{kt}.$$

2. Процессы показательного роста. Рассмотренная в предыдущем пункте математическая модель, при которой скорость изменения величины пропорциональна этой величине, с достаточной точностью описывает многие физические, химические и биологические процессы.

Пример 1. При радиоактивном распаде мгновенная скорость распада в каждый момент времени t пропорциональна наличному количеству вещества (чем больше имеется атомов вещества, тем больше их распадается). Найдем закон радиоактивного распада.

Решение. Обозначим массу вещества в момент времени t через m, $m=m(t)$, а мгновенную скорость распада через v. Из условия следует, что $v=-km$, где k — коэффициент пропорциональности; знак «минус» поставлен потому, что вещество распадается и его количество уменьшается, т. е. скорость изменения количества вещества отрицательна (заметим, что написанная формула справедлива лишь в случае, когда речь идет о самопроизвольном распаде вещества, а не о распаде в процессе атомного взрыва).

Поскольку v — скорость изменения массы вещества, т. е. скорость изменения функции $m(t)$, то $v=m'(t)$, а потому равенство $v=-km$ можно переписать в виде:

$$m'=-km.$$

Это уравнение вида (1). Его решение имеет, как было отмечено выше, вид:

$$m=m_0e^{-kt},$$

где m_0 — первоначальная масса вещества (при $t=0$).

Найдем, за какой промежуток времени T масса вещества уменьшится вдвое. Для этого надо решить показательное уравнение $e^{-kt}=\frac{1}{2}$. Из него находим, что $-kT=\ln\frac{1}{2}$, и потому $kT=\ln 2$, т. е. $T=\frac{\ln 2}{k}$.

Найденное значение T называют *периодом полураспада* данного радиоактивного вещества. Этот период зависит не от начального количества m_0 этого вещества, а лишь от вида атомного ядра. Например, период полураспада радия-226 равен 1620 годам, а урана-238 — 4,5 млрд. лет. В физике закон радио-

активного распада обычно выражают через период полураспада T:

$$m = m_0 e^{-kt} = m_0 \left(e^{-kT}\right)^{\frac{t}{T}} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Итак, получаем следующий закон радиоактивного распада:

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Пример 2. Пусть колония живых организмов находится в благоприятных условиях, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность, причем пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы будем считать неограниченными. Предположим также, что хищников, питающихся организмами данной колонии, нет. Найдем закон изменения численности организмов в зависимости от времени, если в момент времени $t=0$ их число равнялось y_0.

Решение. Заметим, что число организмов всегда выражается целым числом. Поэтому оно является разрывной функцией от времени, и, казалось бы, к данному вопросу нельзя применить модель, основанную на понятии производной. Но при достаточно большом числе организмов в колонии эту разрывную функцию можно с достаточной точностью приблизить непрерывной и даже дифференцируемой функцией и изучать соответствующую модель явления. Если в результате расчетов окажется, что, например, число организмов в колонии равно 125,76, то это означает, что на самом деле число организмов примерно равно 125 или 126. Сделанная при этом ошибка куда меньше, чем ошибка, связанная с неточностью выбранной модели, недостаточной определенностью значений коэффициентов и начальных условий и других привходящих обстоятельств.

Будем считать, что скорость изменения численности организмов пропорциональна этой численности и α — коэффициент пропорциональности: $v = \alpha y$. Так как $v = y'$, то численность y организмов в колонии в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$y' = \alpha y.$$

Из формулы (2) получаем, что число организмов в колонии выражается законом

$$y = y_0 e^{\alpha t}.$$

Поскольку при $\alpha > 0$ функция $y_0 e^{\alpha t}$ стремится к бесконечности при $t \to +\infty$, то и число экземпляров данного вида будет стремиться к бесконечности. Например, расчеты показывают, что потомство одной пары мух за два года при беспрепятственном размножении имело бы массу, превосходящую массу Земли. В действительности столь быстрый рост, естественно, не на-

блюдается, хотя известны случаи, когда некоторые виды животных и растений, попав в благоприятные условия, размножались настолько быстро, что становились бедствием (кролики в Австралии, водяной гиацинт в реках США и т. д.).

Сделанные нами при решении примера 2 предположения не отражают все стороны явления. Позднее (см. п. 9) мы вернемся к этой задаче, учтя ограниченность пространства, пищевых ресурсов, наличие хищников и т. д.

Пример 3. При распаде ядер радиоактивных веществ образуются нейтроны. При некоторых условиях они попадают в другие ядра и вызывают их радиоактивный распад. Если при этом образуется больше нейтронов, чем поглощено, начинается цепная реакция. Напишем уравнение цепной реакции, если вначале было n_0 нейтронов.

Решение. Будем считать, что число появляющихся нейтронов пропорционально их числу в данный момент времени (чем больше нейтронов в данном объеме, тем чаще они сталкиваются с ядрами и тем больше новых нейтронов появляется). Это значит, что скорость v возникновения нейтронов в данный момент времени пропорциональна их числу n в тот же момент времени: $v=kn$, т. е. $n'=kn$. Изучаемый процесс, как мы видим, укладывается в разобранную выше модель, что позволяет записать ответ в следующем виде:

$$n=n_0e^{kt}.$$

Поскольку при каждом распаде ядра выделяется энергия, а число распадов растет по показательному закону, то столь же быстро растет и выделяемая энергия — получается ядерный взрыв.

Мы рассмотрели три примера процессов, математической моделью которых служит уравнение вида $y'=ky$. Поскольку решение этого уравнения имеет вид $y=Ce^{kt}$, т. е. решение уравнения — показательная функция, то уравнение $y'=ky$ называется *уравнением показательного роста*. Рассмотренные в настоящем пункте процессы (и аналогичные им) называются процессами показательного роста.

3. Процессы выравнивания. Наряду с процессами показательного роста, когда скорость изменения величины пропорциональна значению этой величины, встречаются процессы, в которых эта скорость пропорциональна разности между значением величины и некоторым стандартным значением a, причем коэффициент пропорциональности отрицателен. В этом случае имеем: $v=-k(y-a)$, где $k>0$. Поскольку $v=y'$, то полученное равенство можно записать в виде

$$y'=-k(y-a). \qquad (3)$$

Чтобы найти y из этого уравнения, введем новую искомую функцию $z=y-a$. Так как $z'=(y-a)'=y'-a'=y'-0=y'$, то

уравнение (3) можно переписать в виде $z' = -kz$. Решение последнего уравнения, как отмечалось в п. 1, имеет вид: $z = z_0 e^{-kt}$. Поскольку $y = z + \alpha$, $z_0 = y_0 - \alpha$, то получаем, что

$$y = \alpha + (y_0 - \alpha) e^{-kt}. \qquad (4)$$

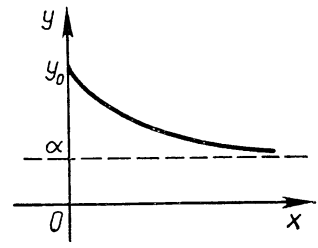

Рис. 1

Здесь y_0 — начальное значение искомой величины y (т. е. ее значение в момент времени $t = 0$).

Если $t \to +\infty$, то функция e^{-kt} стремится к нулю. Поэтому с течением времени значение y приближается к числу α (см. рис. 1). Процессы описанного вида называются *процессами выравнивания.*

Пример 4. При определенных условиях можно принять, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды и имеет знак, противоположный знаку этой разности. Найдем зависимость температуры T остывающего тела от времени t.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$T' = -k(T - T_1),$$

где T — температура тела в момент времени t, а T_1 — температура окружающей среды. Это уравнение процесса выравнивания (см. уравнение (3)). Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1) e^{-kt},$$

где T_0 — начальная температура тела (точнее говоря, в задаче речь идет не о температуре тела, а о температуре его поверхности).

С течением времени температура тела приближается к температуре окружающей среды T_1, причем этот процесс выравнивания идет тем быстрее, чем больше значение коэффициента k.

Пример 5. Скорость, с которой протекает разложение сахарозы на фруктозу и глюкозу, пропорциональна молярной концентрации раствора сахарозы (моль/л). Найдем зависимость количества молей сахарозы от времени.

Решение. Обозначим через α начальную концентрацию раствора и через y количество молей сахарозы, прореагировавших в 1 л раствора к моменту времени t. Тогда концентрация раствора равна $\alpha - y$, и потому имеем равенство $v = k(\alpha - y)$. Из него следует, что

$$y' = -k(y - \alpha).$$

Это уравнение процесса выравнивания, значит (см. равенство (4), находим, что

$$y=\alpha+(y_0-\alpha)e^{-kt}.$$

В начальный момент времени, т. е. при $t=0$ имеем $y=0$. Значит, $y_0=0$ и полученное решение уравнения мы можем переписать в виде

$$y=\alpha-\alpha e^{-kt}=\alpha(1-e^{-kt}).$$

Отсюда видно, что количество прореагировавшего вещества с течением времени стремится к α.

Упражнения

1. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества, если известно, что скорость распада в каждый момент времени пропорциональна наличному количеству вещества?

2. Период полураспада некоторого радиоактивного вещества равен 1000 лет. Сколько останется этого вещества через 100 лет? 500 лет? 2000 лет?

3. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Найти зависимость массы фермента от времени, если в начальный момент времени $t=0$ было y_0 кг фермента.

4. Чему равно первоначальное количество фермента при брожении (см. упр. 3), если через 3 ч после начала брожения количество фермента составляло 0,5 кг, а через 7 ч — 2 кг?

5. В комнате, где температура воздуха равна 20°, некоторое тело охлаждается от 100 до 60° за 20 мин. Считая скорость остывания тела пропорциональной разности температур тела и окружающей среды, определить, за какое время тело остынет до 30°.

6. Определить путь, пройденный прямолинейно движущимся телом за время t, если его скорость пропорциональна пройденному к этому моменту пути и если известно, что за первые 20 с тело прошло 400 м, а за следующие 15 с — 2800 м.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

4. Основные определения. В предыдущем параграфе мы видели, что многие задачи физики, химии, биологии сводятся к решению уравнений вида $y'=ky$ или $y'=k(a-y)$. Столь простая зависимость имеет место далеко не всегда, поэтому нужен общий математический аппарат, позволяющий рассчитывать более сложные процессы.

Оказывается, решение большинства задач естествознания после соответствующих упрощений сводится к решению уравнений, содержащих искомую функцию или несколько функций

зависящих от одного или нескольких аргументов, сами эти аргументы и производные различных порядков от искомых функций. Во многих случаях решение таких задач сводится к решению уравнений, содержащих функции одной переменной,— их называют обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Обыкновенным дифференциальным уравнением с одной искомой функцией называют уравнение, содержащее производные искомой функции до некоторого порядка включительно, а также, быть может, саму эту функцию и независимую переменную. Наивысший порядок производных, входящих в это уравнение, называется *порядком уравнения.*

Например, $y'+3x\sin y=x^3$ — уравнение первого порядка, а $(y'')^3+(y')^2=x^4$ — уравнение второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называют любую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Пример 1. Докажем, что функция $y=\sin\omega x$ является решением дифференциального уравнения $y''+\omega^2y=0$.

Решение. Имеем:

$$y'=\omega\cos\omega x,\quad y''=-\omega^2\sin\omega x.$$

Подставляя значения y и y'' в заданное уравнение, получаем тождество

$$-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0.$$

Значит, действительно $y=\sin\omega x$ — решение данного уравнения. Точно так же проверяется, что функция $y=\cos\omega x$ удовлетворяет этому уравнению. Более того, можно показать (оставляем это читателю), что, каковы бы ни были постоянные C_1 и C_2, функция $y=C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x$ является решением уравнения $y''+\omega^2y=0$.

Решая в п. 1 уравнение первого порядка $y'=ky$, мы получили бесконечное множество решений $y=Ce^{kx}$, причем каждое решение определялось значением одной произвольной постоянной C. А при решении уравнения второго порядка $y''+\omega^2y=0$ получилось бесконечное множество решений, зависящих уже от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Это не случайно — можно доказать, что *при решении уравнения n-го порядка получается ответ, содержащий n произвольных постоянных, причем число этих постоянных нельзя уменьшить.* Такой ответ называют *общим решением дифференциального уравнения n-го порядка.* Если же заменить произвольные постоянные какими-то конкретными числовыми значениями, то получится *частное решение уравнения.* Например, полагая в решении $y=Ce^{kx}$ уравнения показательного роста ($y'=ky$) $C=5$, получаем частное решение $y=5e^{kx}$.

Обычно частные решения выделяются теми или иными условиями, например значениями искомой функции и ее некоторых

производных в начале процесса (начальные условия) или их значениями в двух точках (краевые условия).

5. Поле направлений. Задачи, встречающиеся на практике, приводят к самым разнообразным дифференциальным уравнениям, для многих из которых нет алгоритма отыскания решения. В таких случаях применяют приближенные методы решения дифференциальных уравнений. С одним из таких методов мы познакомимся ниже, в п. 7.

Прежде чем излагать суть метода, введем важное понятие поля направлений. Говорят, что в некоторой плоской области задано *поле направлений,* если каждой точке этой области сопоставлено некоторое направление.

Например, если на плоскости задано силовое поле (электрическое или магнитное), то каждой точке соответствует вектор, т. е. направление. Таким образом, силовое поле определяет некоторое поле направлений.

Для того чтобы задать поле направлений, обычно поступают так: в каждой точке $M(x, y)$ данной области указывают значение $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между направлением поля в точке $M(x, y)$ и положительным направлением оси абсцисс. Таким образом, поле направлений задается равенством $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$. Если по мере приближения к точке $M(x, y)$ значение функции $f(x, y)$ стремится к бесконечности, то это означает, что в рассматриваемой точке поле имеет вертикальное направление (тангенс не существует).

Пример 2. Построим поле направлений, задаваемое формулой

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. В точке $M_0(0, 0)$ получаем, что $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{0^2+0^2}=0$. Значит, в этой точке $\alpha=0$, т. е. поле направлено по оси абсцисс. В точке $M_1(1, 0)$ имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{1^2+0^2}=1$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha=1$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Значит, в точке $M_1(1, 0)$ направление поля составляет угол $\frac{\pi}{4}$ с осью абсцисс. Такое же направление имеет поле и в точках $M_2(0, 1)$, $M_3(-1, 0)$ и вообще во всех точках окружности $x^2+y^2=1$. Точно так же во всех точках окружности $x^2+y^2=3$ (ее радиус равен $\sqrt{3}$) поле образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$ (в самом деле, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$), а в точках окружности $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ оно образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{6}$. Полученные результаты изображены на рис. 2.

При построении поля направлений удобно использовать линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. В данном случае этими линиями оказались окружности с центром в начале координат. Так как в точках этих окружностей

поле имеет одно и то же направление, их называют изоклинами (от греческих слов «изос»— равный и «клино»— наклоняю).

Вообще если поле направлений задано равенством $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, то изоклины образуют семейство линий, задаваемых уравнениями $f(x, y)=C$. В точках линии $f(x, y)=C$ поле образует с положительным направлением оси абсцисс такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha=C$.

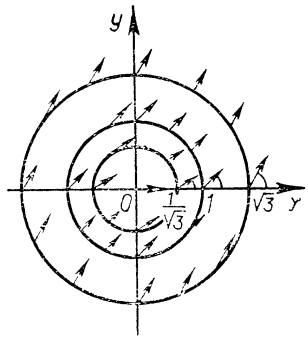

Рис. 2

Пример 3. Построим с помощью изоклин поле направлений, задаваемое формулой $\operatorname{tg}\alpha=y-x$.

Решение. Изоклины имеют уравнения $y-x=C$, т. е. являются прямыми линиями, параллельными биссектрисе первого и третьего координатных углов (рис. 3). На самой биссектрисе, т. е. на линии $y-x=0$, поле образует с осью абсцисс угол $\alpha=0$, на прямой $y-x=1$ — угол $\frac{\pi}{4}$ (так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$), на прямой $y-x=\sqrt{3}$ — угол $\frac{\pi}{3}$. На прямой $y-x=-2$ поле образует с положительным направлением оси абсцисс такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha=-2$, т. е. примерно 115°.

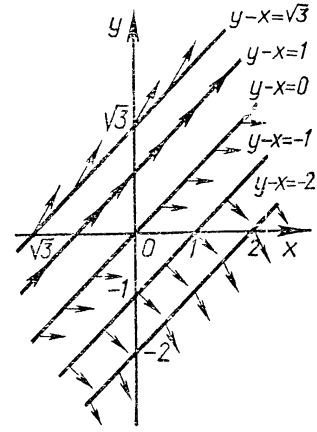

Рис. 3

Аналогично находятся направления на остальных прямых семейства изоклин.

6. Геометрический смысл дифференциального уравнения. Графиком частного решения дифференциального уравнения является некоторая линия на плоскости. Эту линию называют *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения. Общее решение есть семейство интегральных кривых.

Пусть $y=\varphi(x)$ — интегральная кривая уравнения $y'=f(x, y)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$. Подставив координаты этой точки в $f(x, y)$, получим число $f(x_0, y_0)$ (полагаем, что функция f определена в точке M_0). Это число в силу заданного уравнения равно значению $y'=\varphi'(x)$ в точке M_0. Но значение производной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ равно, как известно, тангенсу угла наклона к оси абсцисс касательной к кривой $y=\varphi(x)$ в точке с абсциссой x_0. Значит, направление касательной к интегральной кривой в каждой точке совпадает с направлением поля, для которого $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$. Короче говоря, *интегральная кривая касается в каждой своей точке поля направлений.*

Пример 4. Построим поле направлений и интегральные кривые для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Решение. Изоклины для искомого поля направлений имеют вид $-\frac{x}{y} = C$. При этом каждому значению C соответствует изоклина, для которой угол наклона α определяется условием $\operatorname{tg}\alpha = C$. Так как сама изоклина является прямой $y = -\frac{1}{C}x$ и ее угловой коэффициент равен $-\frac{1}{C}$, то поле направлений в каждой точке перпендикулярно изоклине. Поэтому оно имеет вид, изображенный на рис. 4.

Интегральные кривые должны в каждой точке касаться поля направлений, т. е. быть перпендикулярными изоклинам. Но изоклины — прямые, проходящие через начало координат. Ясно, что условие перпендикулярности выполняется лишь для окружностей с центром в начале координат. Поэтому интегральными кривыми для нашего уравнения являются окружности, имеющие уравнение $x^2 + y^2 = r^2$.

7. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера. Точное построение интегральных кривых требует умения решать дифференциальные уравнения. Этим вопросом мы займемся в § 4. Сейчас мы рассмотрим метод приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на их геометрической трактовке. С одним из примеров такого приближенного решения мы встретились выше, в п. 1, а теперь рассмотрим этот вопрос в общем виде. Чтобы приближенно решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, поступают следующим образом. Задают некоторый шаг h и вычисляют приращение искомой функции на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ по приближенной формуле $\Delta y \approx y'(x_0) \cdot h$. Так как по уравнению значение производной в точке x_0 равно значению функции f в точке $M(x_0, y_0)$, т. е. $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, то приближенное равенство принимает вид:

$$\Delta y \approx f(x_0, y_0) \cdot h.$$

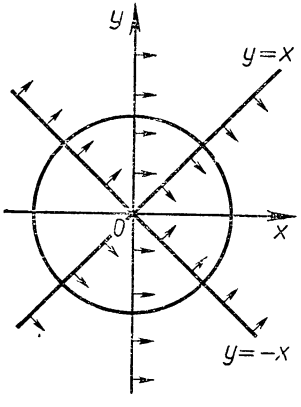

Рис. 4

Обозначим $x_0 + h$ через x_1, а число $y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$, т. е. приближенное значение y при $x = x_1$, обозначим y_1. Далее таким же образом вычисляем приближенное значение искомой функции в точке $x_2 = x_0 + 2h$:

$$y_2 \approx y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h.$$

Дальнейшие вычисления происходят по рекуррентной формуле

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,\ y_n)\cdot h. \qquad (1)$$

Если наметить на плоскости точки $M_k(x_k,\ y_k)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и соединить их по порядку отрезками, получим ломаную — она называется *ломаной Эйлера,*— приближенно изображающую график искомого решения. Приближение будет тем лучшим, чем меньше выбрано значение h.

Изложенный графический метод приближенного решения дифференциального уравнения носит название *метода Эйлера.* Заметим, что число h, характеризующее шаг ломаной, может быть как положительным, так и отрицательным.

Пример 5. Дано уравнение $y'=\frac{2y}{x}$ и начальные условия $y(1)=1$. Применив метод Эйлера, построим на промежутке $]0,\ 1]$ ломаную, приближенно изображающую частное решение уравнения при заданных начальных условиях.

Решение. Разделим промежуток $]0,\ 1]$ на 5 равных частей и положим $x_0=1$; $x_1=0{,}8$; $x_2=0{,}6$; $x_3=0{,}4$; $x_4=0{,}2$. Здесь $h=-0{,}2$.

Отметим точку $M_0(1,\ 1)$, через которую должна проходить искомая интегральная кривая (рис. 5). Построим следующую вершину ломаной $M_1(x_1,\ y_1)$.

У нас $f(x,\ y)=\frac{2y}{x}$, значит, $f(x_0,\ y_0)=f(1,\ 1)=2$. По формуле (1) находим:

$$y_1=y_0+f(x_0,\ y_0)\cdot h=1-2\cdot 0{,}2=0{,}6.$$

Отмечаем точку $M_1(x_1,\ y_1)$, т. е. $M_1(0{,}8;\ 0{,}6)$.

Далее имеем:

$$y_2=y_1+f(x_1,\ y_1)\cdot h=y_1+\frac{2y_1}{x_1}\cdot h=0{,}6-\frac{2\cdot 0{,}6}{0{,}8}\cdot 0{,}2=0{,}3.$$

Отмечаем точку $M_2(x_2,\ y_2)$, т. е. $M_2(0{,}6;\ 0{,}3)$.

Далее имеем:

$$y_3=y_2+f(x_2,\ y_2)\cdot h=y_2+\frac{2y_2}{x_2}\cdot h=$$

$$=0{,}3-\frac{2\cdot 0{,}3}{0{,}6}\cdot 0{,}2=0{,}1.$$

Отмечаем точку $M_3(0{,}4;\ 0{,}1)$.

Наконец,

$$y_4=y_3+f(x_3,\ y_3)\cdot h=y_3+\frac{2y_3}{x_3}\cdot h=$$

$$=0{,}1-\frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}4}\cdot 0{,}2=0.$$

Отмечаем точку $M_4(0{,}2;\ 0)$.

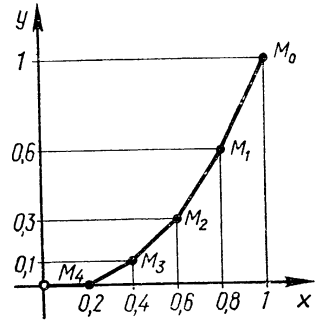

Рис. 5

В итоге получаем ломаную $M_0M_1M_2M_3M_4O$ (сама точка O исключается из рассмотрения, так как по смыслу заданного уравнения имеем $x \neq 0$).

Построенная ломаная приближенно напоминает параболу. Это и на самом деле так, в чем нетрудно убедиться, найдя решение заданного уравнения точными методами. Искомое частное решение — парабола $y=x^2$ (см. упр. 22 г).

Упражнения

7. Доказать, что заданная функция является решением заданного дифференциального уравнения:

Функция	Уравнение
$y=x^2+x$	$xy'-x^2=y$
$y=xe^x$	$y''+3y'-4y=5e^x$
$y=C_1 \sin 3x+C_2 \cos 3x$	$y''+9y=0$

8. Известно, что при некотором значении A функция $y=Ae^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y''+2y'+3y=22e^{2x}$. Вычислить это значение A.

9. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин вращался со скоростью 60 об/мин.

10. Методом изоклин постройте поле направлений для уравнения $yy'=x$. Постройте интегральную кривую, проходящую через точку $P(0, 2)$. Сопоставьте полученный результат с точным решением этого уравнения.

11. Применив метод ломаных Эйлера, найдите на отрезке $[0, 1]$ приближенное решение дифференциального уравнения $y'=4x-2y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=\frac{1}{2}$ (отрезок $[0, 1]$ разделите на 4 равные части). Найдите значение y при $x=1$.

§ 3. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8. Дифференциальные уравнения динамики. Среди многочисленных законов физики одним из наиболее важных является второй закон Ньютона, охватывающий все многообразие процессов, связанных с движением тел. Для случая, когда во время движения масса тела остается неизменной (а до создания

ракет лишь этот случай играл важную для практики роль), второй закон Ньютона сводится к следующему: *действующая на свободно движущееся тело сила пропорциональна вызываемому ей ускорению движения, причем коэффициент пропорциональности равен массе тела.*

В этой формулировке и ускорение, и сила рассматриваются как векторные величины и потому запись закона имеет следующий вид: $\vec{F}=m\vec{a}$.

Если движение прямолинейно, то сила и ускорение направлены по прямой и получается более простая запись второго закона Ньютона:

$$F=ma.$$

Но скорость прямолинейно движущегося тела является производной его координаты по времени, а ускорение — производной скорости по времени, т. е. второй производной от координаты по времени. Иными словами, имеют место равенства $v=y'$, $a=v'=y''$. Значит, вместо $F=ma$ можно записать $F=my''$.

В большинстве случаев сила F зависит от трех переменных: времени t, координаты точки y и скорости y', т. е. $F=F(t, y, y')$. Поэтому равенство $F=my''$ можно записать так:

$$my''=F(t, y, y').$$

Получилось дифференциальное уравнение второго порядка, из которого надо найти закон движения точки, т. е. зависимость y от t, $y=f(t)$. Таким образом, изучение прямолинейного движения материальной точки, на которую действуют данные силы, сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим несколько примеров составления дифференциальных уравнений в задачах динамики. Некоторые из этих уравнений будут решены в § 4.

Пример 1. Составим дифференциальное уравнение движения парашютиста, если сила сопротивления воздуха принимается пропорциональной скорости движения.

Решение. Сила тяжести равна mg, а сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения и направлена в сторону, противоположную направлению скорости, т. е. равна $-kv$. Поэтому общая сила F, действующая на парашютиста, равна $mg-kv$. По второму закону Ньютона имеем: $F=ma$. Таким образом, получаем: $ma=mg-kv$. Учитывая, что скорость есть первая, а ускорение — вторая производная искомой функции y, выражающей расстояние от положения парашютиста в начальный момент времени до его положения в момент времени t (мы считаем, что спуск парашютиста происходит по прямой), приходим к следующему дифференциальному уравнению движения:

$$my''=mg-ky'. \qquad (1)$$

Пример 2. Напишем дифференциальное уравнение свободного полета ракеты, удаляющейся от Земли.

Решение. Поскольку при удалении от Земли сила тяжести, действующая на ракету, убывает, то придется учесть не только второй закон Ньютона, но и его же закон тяготения (и тот и другой законы были открыты Ньютоном при решении конкретной задачи — исследовании движения планет вокруг Солнца и вывода открытых Кеплером законов этого движения). По закону всемирного тяготения имеем:

$$|F| = -G\frac{mM}{y^2},$$

где m — масса ракеты, M — масса Земли, y — расстояние ракеты от центра Земли, G — гравитационная постоянная. Поэтому дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$my'' = -\frac{GmM}{y^2},$$

т. е.

$$y'' = \frac{-GM}{y^2}.$$

Заметим, что на поверхности Земли, т. е. при $y = R$ (R — радиус Земли), имеем: $F = -mg$. Поэтому $-mg = -\frac{mMG}{R^2}$, т. е. $MG = gR^2$. Это позволяет записать уравнение движения ракеты следующим образом:

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}. \qquad (2)$$

Пример 3. Предположим, что вдоль диаметра Земли, соединяющего Северный полюс с Южным, сделан туннель, в который брошено тело массы m. Напишем дифференциальное уравнение движения этого тела, пренебрегая сопротивлением среды и считая плотность Земли постоянной.

Решение. Нам понадобится следующее свойство тяготения: сила тяготения внутри полого шара (т. е. тела, ограниченного двумя концентрическими сферами) равна нулю. Шар же притягивает к себе любое находящееся вне его тело так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Поэтому если движущееся по туннелю тело находится на расстоянии y от центра Земли, то на него действует сила тяготения шара с радиусом y. Масса этого шара в y^3/R^3 раз меньше массы Земли, т. е. равна $\frac{y^3M}{R^3}$. Поэтому действующая на него сила равна

$$F = -G\frac{mMy^3}{R^3y^2} = -\frac{GmMy}{R^3} = \frac{-mgR^2y}{R^3} = -\frac{mgy}{R}.$$

Чтобы проверить, не ошиблись ли мы при отыскании силы, действующей на движущееся тело, заметим, что при $y=R$ (т. е. на поверхности Земли) получаем $F=-mg$, как и должно быть, а при $y=0$ (т. е. в центре Земли) получаем $F=0$, как и должно быть, поскольку в этой точке силы тяготения отдельных частей Земли уравновешиваются.

Тем самым доказано, что дифференциальное уравнение движения нашего фантастического тела имеет вид:

$$y''=-\frac{gy}{R}. \qquad (3)$$

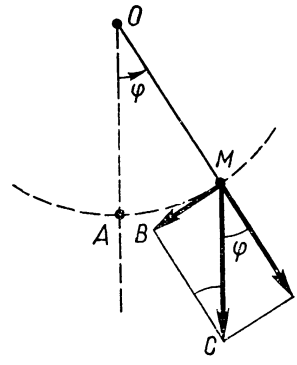

Рис. 6

Пример 4. Пусть на нерастяжимой невесомой нити длины l подвешена материальная точка, имеющая массу m. Если отклонить натянутую нить от положения равновесия и отпустить ее, возникнут колебания. Напишем дифференциальное уравнение этих колебаний, считая сопротивление воздуха и трение в точке подвеса равными нулю (задача о колебании математического маятника).

Решение. Обозначим через φ величину угла AOM в момент времени t и разложим силу тяжести mg на радиальную и тангенциальную составляющие (рис. 6). Тангенциальная составляющая (т. е. составляющая, направленная по касательной) равна $-mg\sin\varphi$ (направление действия силы обратно направлению отклонения). Линейная скорость движущейся по окружности радиуса l точки равна $l\omega$, где ω — угловая скорость, т. е. производная φ по t, $\omega=\varphi'$. Значит, $v=l\varphi'$. Отсюда вытекает, что линейное ускорение равно производной от $l\varphi'$, т. е. $l\varphi''$ (здесь существенно, что величина l постоянна). Итак, сила $-mg\sin\varphi$ дает ускорение $l\varphi''$, и потому, воспользовавшись вторым законом Ньютона, получаем дифференциальное уравнение $ml\varphi''=-mg\sin\varphi$, т. е.

$$l\varphi''=-g\sin\varphi. \qquad (4)$$

9. Дифференциальное уравнение движения планеты вокруг Солнца. В предыдущем пункте мы рассматривали примеры составления дифференциальных уравнений для прямолинейных движений. Общий вид такого уравнения, как мы отметили в п. 5, таков:

$$my''=F(t,\ y,\ y').$$

Если движение не является прямолинейным, то уравнение движения принимает вид:

$$m\vec{r}''=F(t,\ \vec{r},\ \vec{r}'),$$

где $\vec{r}(t)$ — векторная функция аргумента t (т. е. функция, ставящая в соответствие каждому значению t вектор $\vec{r}(t)$). Как и для скалярных функций, производная определяется в этом случае равенством

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Производная $\vec{r}'(t)$ является вектором, направленным в каждый момент времени по касательной к траектории движения, причем длина вектора равна линейной скорости движения в данный момент времени.

Напишем дифференциальное уравнение движения планеты вокруг Солнца (это уравнение было составлено и решено Ньютоном). Если начальная скорость планеты выражается вектором $\vec{v}_0$, то в дальнейшем планета будет двигаться в плоскости, проходящей через Солнце (оно считается материальной точкой) и параллельной этому вектору. Поэтому можно с самого начала рассматривать задачу о движении в плоскости.

Предположим, что Солнце находится в начале координат O, а планета — в точке $M(x; y)$. Сила тяготения направлена по прямой OM от M к O и обратно пропорциональна квадрату расстояния от M до O (рис. 7). Поэтому $\vec{F} = -k(\vec{r}) \cdot \vec{r}$, причем

$$|\vec{F}| = \frac{k_1}{|\vec{r}|^2}, \text{ где } \vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Отсюда выводим, что $\frac{k_1}{|\vec{r}|^2} = k(\vec{r}) \cdot |\vec{r}|$, и потому $k(\vec{r}) = \frac{k_1}{|\vec{r}|^3}$.

Значит, $\vec{F} = -\frac{k_1}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$, и, следовательно, дифференциальное уравнение движения планеты имеет вид:

$$m\vec{r}'' = -\frac{k_1}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}. \qquad (5)$$

Поскольку $\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$, то $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$, а $\vec{r}'' = x'' \cdot \vec{i} + y'' \cdot \vec{j}$. Поэтому уравнение (5) можно переписать в виде

$$m(x''\vec{i} + y''\vec{j}) = -\frac{k_1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}).$$

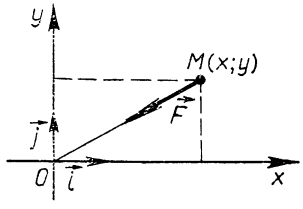

Рис. 7

Полученное векторное уравнение равносильно системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} mx'' = -\dfrac{k_1 x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ my'' = -\dfrac{k_1 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Таким образом, исследование движения планеты вокруг Солнца сводится к решению системы дифференциальных уравнений.

Решая дифференциальные уравнения движения планет, их спутников и комет, ученые предсказывают будущее движение этих небесных тел, узнают моменты затмений спутников и т. д. Большим торжеством математических методов естествознания оказалось предсказание появления кометы Галлея в 1759 г. А когда оказалось, что планета Уран отклоняется от заранее вычисленной орбиты, ученые не усомнились в правильности математических методов, а предположили, что просто существует еще одна планета, неизвестная тогдашним астрономам и влияющая своим притяжением на движение Урана. В середине XIX в. французский астроном У. Леверье и английский астроном Дж. Адамс одновременно и независимо друг от друга вычислили, как должна двигаться эта неизвестная планета, чтобы вызвать наблюдаемые возмущения движения Урана. Это позволило им предугадать положение неизвестной планеты. В 1846 г. немецкий астроном И. Галле по расчетам, сделанным Леверье, нашел в указанном месте неизвестную ранее планету (ее назвали Нептуном). Английские астрономы не поверили расчетам молодого ученого Адамса (ему было в то время всего 26 лет) и упустили приоритет в открытии Нептуна.

Сейчас методы, разработанные в свое время для теоретической астрономии, применяются для изучения движения искусственных спутников, ракет и т. д.

10. Дифференциальное уравнение для расчета силы тока в простейшей электрической цепи. Если в замкнутую электрическую цепь последовательно включены источник тока с электродвижущей силой (э. д. с.) E, активное сопротивление R и катушка с индуктивностью L, то, как известно из электротехники, имеет место равенство

$$E = U_{\text{акт}} + U_{\text{кат}},$$

где $U_{\text{акт}}$ — напряжение на активном участке цепи и $U_{\text{кат}}$ — напряжение на катушке. Кроме того, известно, что

$$U_{\text{акт}} = R \cdot I, \quad U_{\text{кат}} = L \cdot I',$$

где I — сила тока в момент времени t.

Отсюда вытекает дифференциальное уравнение

$$E = RI + L \cdot I' \tag{6}$$

для отыскания функции $I(t)$.

В § 4 мы рассмотрим это уравнение для случая переменной э. д. с. $E(t)$, а сейчас предположим, что E постоянна. Преобразуем тогда уравнение (6) к виду

$$I' = \frac{E}{L} - \frac{RI}{L}$$

и далее

$$I' = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E}{R}\right).$$

Это уравнение процесса выравнивания (см. п. 3). Воспользовавшись общей формулой для решения такого уравнения (см. формулу (4) из п. 3), получим:

$$I = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t},$$

где I_0 — начальная сила тока. Если она равна нулю (процесс включения тока), то имеем:

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Замечаем, что если в этом равенстве $t \to +\infty$, то $e^{-\frac{R}{L}t} \to 0$, а потому $I \to \frac{E}{R}$. Это значит, что сила тока стремится к значению, указываемому законом Ома.

11. Дифференциальные уравнения в химии.

Пример 5. Для некоторых химических реакций скорость реакции пропорциональна произведению концентраций двух реагирующих веществ, причем в процессе реакции одна молекула первого вещества реагирует с одной молекулой второго вещества. Напишем дифференциальное уравнение для количества y вещества, возникшего к моменту времени t, если начальная концентрация первого реагента равнялась a, а второго — b.

Решение. После образования y молей нового вещества концентрация раствора первого реагента равна $a-y$, а второго $b-y$. Из условия задачи следует, что

$$y' = k(a-y)(b-y). \qquad (7)$$

Это и есть дифференциальное уравнение химической реакции.

Если $a=b$ (т. е. начальные концентрации обоих реагентов в растворе одинаковы), то уравнение принимает вид:

$$y' = k(a-y)^2. \qquad (8)$$

Пример 6. При некоторых химических реакциях возникающее в процессе реакции вещество действует как катализатор, ускоряющий течение реакции. В этом случае скорость реакции пропорциональна как концентрации исходного вещества, так и некоторой линейной функции от концентрации возникающего вещества (автокаталитическая реакция). Напишем дифференциальное уравнение для количества y вещества, возникшего в момент времени t, если начальная концентрация равна a.

Решение. Опираясь на условия и рассуждая, как в предыдущем примере, получаем дифференциальное уравнение

$$y' = (k+my)(a-y). \qquad (9)$$

Здесь $a-y$ — концентрация исходного вещества, а $k+my$ — линейная функция от концентрации возникающего вещества (k и m — некоторые числовые коэффициенты).

Заметим, что если бы в роли катализатора выступало исходное вещество, то линейная функция, о которой идет речь в задаче, имела бы вид $k+m(a-y)$, а дифференциальное уравнение выглядело так:

$$y' = (k+m(a-y))(a-y). \tag{10}$$

12. Дифференциальные уравнения в биологии. Метод познания действительности с помощью построения математических моделей с успехом применяется в биологии. Но здесь дело осложняется тем, что количество и разнообразие связей в биологических системах намного превосходит количество и разнообразие связей в физике и даже в химии.

Рассматривая в п. 2 § 1 задачу о численности колоний живых организмов, находящихся в благоприятных условиях, мы получили, что эта численность y описывается дифференциальным уравнением $y'=\alpha y$, где α — некоторый коэффициент. При этом мы пренебрегли ограниченностью жизненного пространства и пищевых ресурсов, а также наличием хищников. Решение указанного выше дифференциального уравнения — показательная функция $y=y_0e^{\alpha t}$, растущая очень быстро и неограниченно. На самом же деле чрезмерное увеличение численности данного вида на ограниченной площади приведет к более частым столкновениям из-за пищи, пространства для жилья и т. д. Поскольку при возрастании численности в n раз число нежелательных столкновений увеличивается в n^2 раз, то можно принять, что неблагоприятное влияние численности колонии на рождаемость пропорционально квадрату этой численности. Поэтому уравнение $y'=\alpha y$ заменяется уравнением

$$y' = \alpha y - \beta y^2. \tag{11}$$

Ниже (см. п. 23) мы решим это уравнение и увидим, что оно дает вполне реальную картину, когда численность колонии сначала растет по показательному закону, а потом рост замедляется и численность стремится к некоторому пределу.

Еще более близкие к действительному положению вещей результаты получатся, если учесть, что многие виды развиваются не в изоляции, а имеют врагов (хищников), питающихся ими. Здесь уже придется рассмотреть две функции — число y жертв и число x хищников как функции от времени t. Будем считать, что при отсутствии хищников число жертв возрастает со скоростью, пропорциональной числу экземпляров данного вида, а число жертв, поедаемых хищниками, пропорционально произведению общего количества жертв и общего количества хищников (грубо говоря, пропорционально числу возможных встреч хищ-

ника и жертвы). Тогда получаем дифференциальное уравнение вида

$$y' = \alpha y - \beta xy.$$

Однако, поскольку у нас две искомые функции, надо получить еще одно уравнение, в которое входила бы производная x' — скорость размножения хищников. Ясно, что, чем больше у хищников пищи (жертв), тем быстрее они размножаются. Кроме того, быстрота размножения зависит и от имеющегося в данный момент количества хищников. В то же время смертность хищников пропорциональна их числу, но не зависит от числа жертв. Поэтому для x' имеем в первом приближении такое уравнение:

$$x' = \gamma xy - \delta x.$$

Итак, задача «жертва — хищник» свелась к решению системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = \alpha y - \beta xy, \\ x' = \gamma xy - \delta x \end{cases} \qquad (12)$$

(здесь α, β, γ, δ — некоторые положительные числа). Мы решим эту систему ниже (см. п. 23). Сейчас отметим лишь, что при $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $y = \frac{\delta}{\gamma}$ имеем: $x' = y' = 0$. Это значит, что $M\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma}\right)$ является «стационарным состоянием» изучаемой системы — она находится в равновесии и ни число жертв, ни число хищников не меняется с течением времени.

В заключение подчеркнем, что и система дифференциальных уравнений (12) не является точным отражением действительности — на самом деле надо учитывать наличие многих видов, их различные взаимодействия, общие условия, ограничивающие рост численности некоторого вида, и многие иные факторы. Построение математических моделей больших сообществ животных и растений и эволюции этих сообществ — актуальная и важная задача современной науки.

13. Дифференциальные уравнения, возникающие при решении задач геометрического содержания. Многие задачи геометрии требуют отыскания кривых по заданным свойствам их касательных, нормалей (т. е. прямых, проходящих через точку касания перпендикулярно касательной) и различных отрезков, связанных с этими прямыми. Составление дифференциальных уравнений, к которым приводят такие задачи, связано, как правило, с использованием геометрического смысла производной как углового коэффициента касательной (т. е. тангенса угла, образованного ка-

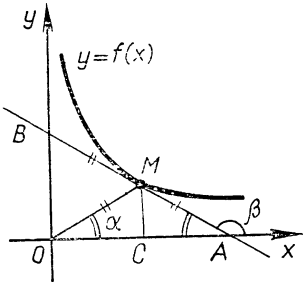

Рис. 8

сательной к кривой с положительным направлением оси абсцисс).

Пример 7. Составим уравнение кривой, проходящей через точку $P(a, b)$ и такой, что для любой ее точки отрезок касательной, заключенный между координатными осями, делится в точке касания пополам.

Решение. Пусть $y=f(x)$ — уравнение искомой кривой (она изображена схематически на рис. 8). В точке $M(x, y)$ к этой кривой проведена касательная, пересекающая оси координат соответственно в точках A и B. Точка M является серединой гипотенузы AB прямоугольного треугольника AOB, и потому отрезок OM — медиана этого треугольника. Но из геометрии известно, что длина медианы прямоугольного треугольника равна половине длины гипотенузы, а потому треугольник OMA — равнобедренный. Значит, углы MOA и MAO имеют одинаковую величину: $\widehat{MOA}=\widehat{MAO}$. Отсюда следует, что $\alpha=\widehat{MOA}=180°-\widehat{MAx}=$ $=180°-\beta$, и потому

$$\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|MC|}{|CO|}$, а $\operatorname{tg}\beta$ равен угловому коэффициенту касательной в точке M, т. е. y'. Значит, имеет место уравнение

$$y'=-\frac{y}{x}. \qquad (13)$$

Оно и является дифференциальным уравнением искомой кривой.

Пример 8. Составим дифференциальное уравнение для такой кривой Г, что после отражения от этой кривой (по законам оптики) пучок параллельных лучей собирается в одной точке.

Решение. Как известно из оптики, угол падения равен углу отражения. При отражении от кривой линии под углами падения и отражения понимаются углы, образованные падающим и отраженным лучами света с нормалью в точке отражения (т. е. с прямой, перпендикулярной касательной к кривой в этой точке). Будем считать, что пучок параллелен оси абсцисс, а точка, через которую проходят отраженные лучи, совпадает с началом координат (рис. 9). Теперь данную физическую задачу можно сформулировать чисто геометрически: найти такую кривую Г, что в любой точке M этой кривой угол между касательной к кривой

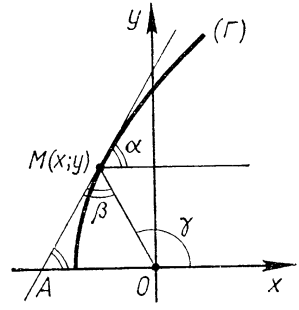

Рис. 9

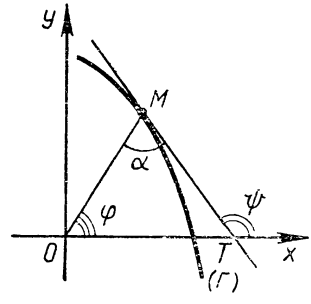

Рис. 10

и положительным направлением оси абсцисс равен углу между касательной и прямой, соединяющей начало координат с точкой M.

По условию задачи имеем: $\alpha=\beta$ (см. рис. 9). Но α — угол между касательной к кривой Г в точке $M(x, y)$ и осью абсцисс, и потому $\operatorname{tg}\alpha=y'$, где $y=f(x)$ — уравнение кривой Г. Поскольку $\alpha=\beta$, то треугольник AOM равнобедренный, и потому $\gamma=2\alpha$. Но тогда $\operatorname{tg}\gamma=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Кроме того, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{y}{x}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha=y'$, то получаем уравнение

$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-(y')^2}. \tag{14}$$

Пример 9. Нож, очерченный по некоторой кривой Г, вращается вокруг точки O (рис. 10). Угол OMT между лучом OM и касательной к Г в точке M называется *углом резания*. Для многих обрабатывающих устройств (металлорежущих станков, соломорезок и т. д.) полезно, чтобы угол резания был постоянным. Составим дифференциальное уравнение для отыскания кривой Г с постоянным углом резания.

Решение. Эту задачу можно переформулировать следующим образом: найти такую кривую, что в любой ее точке M угол между касательной MT и лучом, соединяющим начало координат O с точкой M, постоянен и равен α.

Обозначим буквой φ угол между лучом OM и осью Ox, а буквой ψ угол между касательной MT и осью Ox. По условию имеем: $\overline{OMT}=\alpha$. Но $\psi=\alpha+\varphi$, причем $\operatorname{tg}\psi=y'$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$. Используя формулу тангенса суммы $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}$, получаем уравнение

$$y'=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\cdot\frac{y}{x}} \tag{15}$$

(здесь введено обозначение $k=\operatorname{tg}\alpha$).

14. Общие замечания по составлению дифференциальных уравнений. В рассмотренных выше задачах составление дифференциального уравнения облегчалось тем, что в формулировку соответствующего закона (физического, химического, биологического) явным образом входили скорости или ускорения, т. е. первые или вторые производные искомых функций. В геометрических задачах составление дифференциального уравнения основано на том, что производная выступает в роли углового коэффициента касательной.

Однако часто встречаются процессы, описываемые законом, в формулировку которого не входят явно скорости или ускоре-

ния. Для изучения подобных процессов используется следующая общая идея. Как правило, за малые промежутки времени скорость протекания физических (и других) процессов меняется мало, и потому ее можно считать постоянной. Это позволяет сделать в каждый момент времени «мгновенный снимок» процесса и написать уравнение, связывающее изменения величин, как говорят физики, «за бесконечно малый промежуток времени».

Опишем процесс составления дифференциального уравнения более подробно. Прежде всего нужно установить, какому закону подчиняется процесс, описываемый в условии задачи, и определить, какую из величин, участвующих в процессе, считать независимой, а какую — зависимой переменной. Чаще всего в качестве независимой переменной выбирается время t. Далее считают, что в течение малого промежутка времени $[t, t+\Delta t]$ все участвующие в данном процессе величины меняются равномерно. Это позволяет применить известные законы для составления соотношения между значениями t, Δt, искомой функцией y, ее приращением Δy. Полученное равенство имеет лишь приближенный характер, поскольку на самом деле величины меняются неравномерно. Но если разделить обе части равенства на Δt и перейти к пределу, когда Δt стремится к нулю, то в пределе получим точное равенство, содержащее t, меняющуюся с течением времени величину и ее производные, т. е. дифференциальное уравнение процесса.

Пример 10. Сосуд объемом 40 л содержит 80% азота и 20% кислорода. В сосуд каждую секунду втекает 0,2 л азота и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

Решение. Выберем в качестве независимой переменной время t и обозначим через $y(t)$ количество литров азота в сосуде через t секунд после начала опыта. Тогда азот будет составлять $\frac{y}{40}$ часть всей смеси. За промежуток времени Δt в сосуд поступит $0{,}2\Delta t$ л азота, а вытечет $0{,}2\Delta t$ л смеси. Если считать, что за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ концентрация азота в сосуде оставалась неизменной, то в этом объеме смеси будет $\frac{y}{40} \cdot 0{,}2\Delta t$ (л) азота, а потому прирост количества литров азота выразится так:

$$\Delta y \approx 0{,}2\Delta t - \frac{0{,}2y}{40}\Delta t.$$

Мы написали приближенное равенство, потому что на самом деле за малый промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ концентрация азота хоть немного, но изменяется. Если же разделить обе части этого равенства на Δt и перейти к пределу, когда $\Delta t \to 0$, то, учи-

тывая, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=y'$, получим точное равенство

$$y'=0{,}2\left(1-\frac{y}{40}\right).$$

Оно является дифференциальным уравнением процесса.

Решим составленное дифференциальное уравнение. Для этого преобразуем его к виду

$$y'=-0{,}005(y-40).$$

Это дифференциальное уравнение процесса выравнивания (см. уравнение (3) из п. 3). Воспользовавшись формулой (4) из п. 3, получим:

$$y=40+(y_0-40)e^{-0{,}005t}.$$

Здесь y_0 — значение искомой величины y в момент времени $t=0$. Но по условию в начальный момент времени в 40-литровом сосуде было 80% азота, т. е. 32 л азота. Значит, $y_0=32$. Поэтому

$$y=40-8e^{-0{,}005t}.$$

Теперь уже легко найти, когда концентрация азота в смеси будет 99%. В это время в сосуде окажется 39,6 л азота. Значит, надо решить показательное уравнение

$$39{,}6=40-8e^{-0{,}005t}.$$

Решая его, последовательно находим:

$$8e^{-0{,}005t}=0{,}4,$$

$$e^{-0{,}005t}=0{,}05,$$

$$-0{,}005t=\ln 0{,}05.$$

$$t=-\frac{\ln 0{,}05}{0{,}005}=200\ln 20\approx 600 \text{ с}.$$

Пример 11. В дне цилиндрического сосуда, наполненного водой и имеющего высоту H и радиус основания R, сделано небольшое отверстие площади S. За какой промежуток времени через это отверстие вытечет вся вода, если известно, что треть воды вытекает за t_1 секунд?

Решение. Если бы истечение воды происходило равномерно, то решить задачу не представило бы затруднений — вся вода вытекла бы за $3t_1$ с. Но наблюдения показывают, что сначала вода вытекает быстро, а по мере снижения уровня воды в сосуде скорость ее истечения уменьшается. Поэтому надо учесть зависимость между скоростью истечения v и высотой h столба жидкости над отверстием. Проведенные итальянским физиком Торричелли эксперименты показали, что скорость v приближенно выражается формулой $v=k\sqrt{2gh}$, где g — ускоре-

ние силы тяжести и k — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия (например, для воды в случае круглого отверстия $k=0{,}6$).

Сделаем «моментальный снимок» процесса истечения за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$. Пусть в начале этого промежутка высота столба жидкости над отверстием равнялась h, а в конце его она понизилась и стала равной $h+\Delta h$, где Δh — приращение высоты (которое, очевидно, отрицательно). Тогда объем ΔV жидкости, вытекшей из сосуда, равен объему цилиндра с высотой $|\Delta h|=-\Delta h$ и площадью основания πR^2, т. е.

$$\Delta V=-\pi R^2\Delta h.$$

Эта жидкость вылилась в виде цилиндрической струйки, имеющей площадь основания S. Ее высота равна пути, пройденному вытекающей из сосуда жидкостью за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$. В начале этого промежутка скорость истечения равнялась по закону Торричелли $k\sqrt{2gh}$, а в конце его она равнялась $k\sqrt{2g(h+\Delta h)}$. Если Δt весьма мало, то Δh тоже очень мало, и потому полученные выражения для скорости почти одинаковы. Поэтому путь, пройденный жидкостью за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$, приближенно равен $k\sqrt{2gh}\cdot\Delta t$ (мы считаем, что в течение рассматриваемого промежутка времени скорость истечения постоянна и равна $k\sqrt{2gh}$). Значит, объем вылившейся за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$ жидкости вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$\Delta V\approx k\sqrt{2gh}\Delta t\cdot S.$$

Мы получили два выражения для объема жидкости, вылившейся из сосуда за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$. Приравнивая эти выражения, получаем:

$$-\pi R^2\Delta h\approx k\sqrt{2gh}\cdot S\cdot\Delta t.$$

Если обе части этого приближенного равенства разделить на Δt и перейти к пределу при $\Delta t\to 0$, то получим точное равенство

$$-\pi R^2h'=k\sqrt{2gh}S. \qquad (16)$$

Дифференциальное уравнение процесса истечения жидкости составлено. Решив это уравнение (мы сделаем это позднее, в п. 17), мы получим зависимость высоты столба жидкости в сосуде h от времени t.

Упражнения

12. Моторная лодка движется в стоячей воде со скоростью 5 м/с. На полном ходу ее мотор был выключен и через 40 с ее скорость стала равной 2 м/с. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки, определить скорость лодки через 2 мин после выключения мотора.

13. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя воды толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 30 м?

14. Материальная точка массы m подброшена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найти закон изменения скорости, если на точку, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности равен k).

15. Составить дифференциальное уравнение кривой, если известно, что угловой коэффициент касательной к ней в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

16. Составить дифференциальное уравнение кривой, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

17. Составить дифференциальное уравнение кривой, обладающей следующим свойством: расстояние от начала координат до точки на кривой равно длине отрезка касательной от той же точки на кривой до оси абсцисс.

§ 4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем параграфе многие задачи были сведены к решению дифференциальных уравнений. Общего метода решения, пригодного для всех дифференциальных уравнений, не существует. Но для многих частных видов уравнений можно указать способы решения. Некоторые из них мы рассматриваем в этом параграфе.

15. Уравнения вида $y'=f(x)$. Самыми простыми из дифференциальных уравнений первого порядка являются уравнения вида $y'=f(x)$. Чтобы решить такое уравнение, достаточно найти функцию $y=F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е. первообразную функцию для f. В пособии «Алгебра и начала анализа, 10» показано, что множество всех первообразных для функции f имеет вид: $\{F(x)+C \mid C \in \mathbf{R}\}$. Поэтому если одна из первообразных для f найдена, то общим решением уравнения $y'=f(x)$ является

$$y=F(x)+C.$$

Пример 1. Решим уравнение $y'=x^2$.

Решение. Для функции x^2 одна из первообразных равна $\frac{x^3}{3}$. Значит, общее решение уравнения $y'=x^2$ имеет вид:

$$y=\frac{x^3}{3}+C.$$

Пример 2. Найдем такое решение дифференциального уравнения $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$, что $y(0)=1$.

Решение. Для функции $\frac{1}{\cos^2 x}$ одна из первообразных равна $\operatorname{tg} x$, поэтому общим решением уравнения является

$$y=\operatorname{tg} x+C.$$

Условие $y(0)=1$ позволяет найти значение постоянной C: $1=\operatorname{tg} 0+C$. Значит, $C=1$, т. е. искомое частное решение имеет вид:

$$y=\operatorname{tg} x+1.$$

Итак, решение дифференциальных уравнений вида $y'=f(x)$ сводится к отысканию первообразных. Поэтому, чем для большей совокупности функций мы будем знать первообразные, тем больше таких уравнений, а следовательно, и сводящихся к ним задач будем уметь решать. В учебном пособии «Алгебра и начала анализа, 10» указаны следующие первообразные:

Функция	$x^\alpha,\ \alpha\neq -1$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	e^x	$\frac{1}{x}$
Первообразная	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$-\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$

Кроме того, там указано, что сумма первообразных для функций f и g является первообразной для их суммы $f+g$, а произведение первообразной для функций f на число λ — первообразной для функции λf.

Правило дифференцирования сложной функции позволяет вывести формулу производной от функции $y=\arcsin x$. Запись $y=\arcsin x$ равносильна записи $x=\sin y$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Продифференцируем обе части равенства $x=\sin y$ по x. Получим, что $1=\cos y\cdot y'$, и потому $y'=\frac{1}{\cos y}$. Но $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, откуда $|\cos y|=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$. Но $|\cos y|=\cos y$, так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos y$ неотрицательна. Итак, мы доказали, что $y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. формулу

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Из нее получаем, что

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(мы считали, что $a>0$). Таким образом, функция $\arcsin\frac{x}{a}$ является первообразной для $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Точно так же доказывается, что

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

и что $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ является первообразной для $\frac{1}{a^2+x^2}$.

Предоставляем читателю доказать с помощью дифференцирования еще две формулы:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

$$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'=\frac{2a}{x^2-a^2}.$$

Полученные формулы позволяют расширить наш список первообразных:

Функция	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
Первообразная	$\arcsin\frac{x}{a}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$	$\ln\left\|x+\sqrt{a+x^2}\right\|$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$

Пример 3. Решим уравнение $y'=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. Имеем: $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$.

Поскольку одной из первообразных для $\frac{1}{\cos^2 x}$ является $\operatorname{tg} x$, а для $\frac{1}{\sin^2 x}$ — функция $-\operatorname{ctg} x$, то все первообразные для $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$ имеют вид: $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$.

Таким образом, общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

Пример 4. Решим уравнение $(x^2-9)y'=6$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$y'=\frac{6}{x^2-9}.$$

Так как первообразной для $\frac{1}{x^2-a^2}$ является $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$, то первообразной для $\frac{6}{x^2-9}$ (здесь $a=3$) служит

$$6\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|, \text{ т. е. } \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|.$$

Значит, общее решение заданного дифференциального уравнения таково:

$$y=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$$

Заметим, однако, что в данном случае при записи общего решения удобнее произвольную постоянную записать в виде $\ln|C|$. Это позволит несколько упростить вид общего решения. Мы получим:

$$y=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+\ln|C|,$$

откуда

$$y=\ln\left|C\cdot\frac{x-3}{x+3}\right|.$$

Впрочем, в таких случаях знак модуля опускают, пишут просто $y=\ln\left(C\cdot\frac{x-3}{x+3}\right)$, учитывая, что C — произвольная постоянная, которая сама, так сказать, «исправит» знак выражения под логарифмом: если $\frac{x-3}{x+3}>0$, то надо брать $C>0$, а если $\frac{x-3}{x+3}<0$, то надо брать $C<0$. Аналогичный подход к записи произвольной постоянной часто используется при решении дифференциальных уравнений.

Существенно расширить запас первообразных позволяет следующая теорема.

Теорема. ***Если функция F является первообразной для функции f, а φ — некоторая дифференцируемая функция, то $F(\varphi(x))$ — первообразная для функции $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.***

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$(F(\varphi(x)))'=F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Но $F'=f$, а потому

$$(F(\varphi(x)))'=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Значит, $F(\varphi(x))$ — первообразная для $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

Обычно, вместо $\varphi(x)$ пишут y, а вместо $\varphi'(x)$ пишут y'. Значит, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F(y)$ — первообразная для $f(y)\cdot y'$.

Доказанная теорема позволяет из каждой найденной первообразной находить бесконечное множество других первообразных. Например, мы знаем, что для функции $\frac{1}{x}$ одной из первообразных является $\ln|x|$. Отсюда следует, что для функции $\frac{1}{y}\cdot y'$ первообразной является $\ln|y|$. Поскольку функцию y можно выбирать произвольно, то получаем бесконечное множество новых результатов. Например, полагая $y=x^2+1$, получаем, что для функции $\frac{2x}{x^2+1}$ одна из первообразных имеет вид: $\ln(x^2+1)$. Если же положить $y=\sin x$, то получаем, что для функции $\frac{\cos x}{\sin x}$ одна из первообразных имеет вид: $\ln|\sin x|$.

Частным случаем доказанной теоремы является следующее утверждение, отмеченное в пособии «Алгебра и начала анализа, 10».

Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то $\frac{1}{a}F(ax+b)$ — первообразная для $f(ax+b)$ (здесь $\varphi(x)=ax+b$, и потому $\varphi'(x)=a$).

Пример 5. Найдем частное решение уравнения

$$\sin^2 x\cdot y'=\cos x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Рассмотрим функцию $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Положим $u=\sin x$. Тогда $u'=\cos x$, т. е. выражение $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ можно переписать в виде $\frac{1}{u^2}\cdot u'$. Для $\frac{1}{x^2}$ первообразной служит $-\frac{1}{x}$. Значит, по теореме первообразной для $\frac{1}{u^2}\cdot u'$ служит $-\frac{1}{u}$.

Итак, одной из первообразных для $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ будет $-\frac{1}{\sin x}$, а потому общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=-\frac{1}{\sin x}+C.$$

Воспользовавшись начальным условием $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$, получим:

$$2=-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}+C,$$

откуда $2=-2+C$, т. е. $C=4$.

Искомое частное решение имеет вид: $y=4-\frac{1}{\sin x}$.

Пример 6. Решим уравнение $y'=\frac{x}{1-x^2}$.

Решение. Положим $u=1-x^2$. Тогда $u'=-2x$, и мы имеем:

$$\frac{x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\cdot u'.$$

Так как первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$, то по теореме первообразной для $\frac{1}{u}\cdot u'$ служит $\ln|u|$, т. е. $\ln|1-x^2|$.

Итак, общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|-\frac{1}{2}\ln|C|$$

(здесь произвольную постоянную удобнее записать в указанном виде, т. е. в виде $-\frac{1}{2}\ln|C|$) или

$$y=-\frac{1}{2}\ln C(1-x^2).$$

16. Физические задачи, сводящиеся к уравнению $y'=f(x)$. Известно, что если точка движется по прямой и в момент времени t ее координата равна $x(t)$, а мгновенная скорость — $v(t)$, то $x'(t)=v(t)$. Значит, задача отыскания закона движения $x(t)$ по известной скорости $v(t)$ сводится к решению дифференциального уравнения $x'=v(t)$.

Если нужно найти изменение координаты $x(t)$ движущейся точки за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$, т. е. $x(b)-x(a)$, то задача сводится к отысканию разности значений первообразной для $v(t)$, т. е. к вычислению интеграла

$$\int_a^b v(t)\,dt.$$

Аналогично обстоит дело и в других задачах: если искомая величина y определяется дифференциальным уравнением $y'=f(x)$, то ее изменение, когда аргумент x переходит от значения a к значению b, определяется интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 7. Материальная точка под действием переменной силы $f(x)$ перемещается вдоль оси Ox. Вычислим работу, произведенную этой силой на отрезке от $x=a$ до $x=b$.

Решение. Работа A, произведенная силой f, находится в зависимости от пройденного пути. Если точка проходит малый отрезок пути $[x,x+\Delta x]$, то сила на этом участке мало меняется, ее можно считать равной значению силы в начальной точке участка, т. е. $f(x)$. Тогда работа ΔA на участке $[x, x+\Delta x]$ выразится приближенной формулой $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, откуда находим, что $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем точное равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = A'$, и мы приходим к уравнению $A'=f(x)$. Интегрируя, получим:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим в качестве примера работу, затрачиваемую на растяжение пружины, находящейся в состоянии равновесия. Из закона Гука известно, что сила натяжения пружины пропорциональна ее удлинению, т. е. $f(x)=kx$. Поэтому, чтобы растянуть пружину на a см, надо затратить работу, равную

$$\int_0^a kx\,dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^a = \frac{ka^2}{2}.$$

Пример 8. Вычислим работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из вертикально стоящей цилиндрической цистерны, радиус основания которой равен R, а высота H.

Решение. Здесь мы воспользуемся тем, что работа, которую необходимо затратить, чтобы поднять тело от одной высоты до другой, равна произведению веса тела на высоту подъема. Разобьем цилиндр на части плоскостями, параллельными плоскости основания и находящимися друг от друга на достаточно малом расстоянии. На рис. 11 показан один из получившихся при этом «элементарных цилиндров» (в осевом сечении). Он высечен из данного цилиндра плоскостями, находящимися от плоскости основания на расстояниях x и $x+\Delta x$. Объем этого цилиндра равен $\pi R^2 \Delta x$, а значит, его вес — $\pi R^2 g \Delta x$. Обозначим через ΔA работу, которую надо совершить, чтобы поднять такой «элементарный вес» на высоту x. Она вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$\Delta A \approx \pi R^2 g \Delta x \cdot x.$$

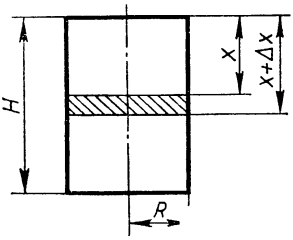

Рис. 11

Отсюда находим: $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx \pi R^2 g x,$

переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$A' = \pi R^2 g x.$$

Дифференциальное уравнение составлено. Чтобы найти работу, совершаемую при переходе от начальной высоты (т. е. $x=0$) к конечной (т. е. $x=H$), нужно вычислить интеграл

$$\int_0^H \pi R^2 g x dx.$$

Получаем:

$$A = \int_0^H \pi R^2 g x dx = \pi R^2 g \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2 g}{2}.$$

Пример 9. Вычислим кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости.

Решение. Разобьем диск на элементарные круговые кольца (рис. 12). Масса Δm кругового кольца толщины Δr, находящегося на расстоянии r от центра диска, равна $2\pi r \rho \Delta r$, где $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ — поверхностная плотность. Значит, $\Delta m = \frac{2\pi r M \Delta r}{\pi R^2}$. Линейная скорость v вращения кольца равна ωr, $v = \omega r$. Следовательно, кинетическая энергия ΔK кольца толщины Δr вычисляется по следующей приближенной формуле:

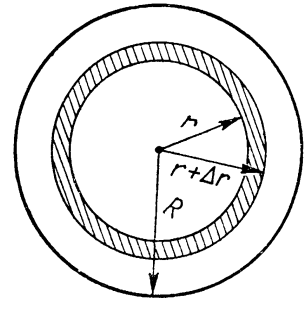

Рис. 12

$$\Delta K \approx \Delta m \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{2\pi r M \Delta r}{\pi R^2} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{M}{R^2} \omega^2 r^3 \Delta r.$$

Значит, $\frac{\Delta K}{\Delta r} \approx \frac{M}{R^2} \omega^2 r^3$, т. е. $K' = \frac{M\omega^2}{R^2} r^3$. Тогда $K = \int_0^R \frac{M\omega^2}{R^2} r^3 dr = \frac{M\omega^2}{R^2} \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{MR^2\omega^2}{4}$.

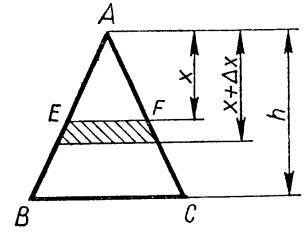

Рис. 13

Пример 10. Найдем силу давления жидкости на вертикальную треугольную пластинку с основанием a и

высотой h, погруженную в жидкость так, что ее вершина лежит на поверхности.

Решение. Здесь мы будем использовать закон Паскаля, согласно которому сила P давления жидкости на площадку площади S, глубина погружения которой равна r, вычисляется так:

$$P=\rho g r S,$$

где ρ — плотность жидкости, g, как обычно, ускорение силы тяжести.

Рассмотрим горизонтальную полоску толщины Δx, находящуюся на глубине x (рис. 13). Принимая эту полоску за прямоугольник, найдем ее основание $|EF|$. Из подобия треугольников ABC и AEF получаем: $\frac{a}{|EF|}=\frac{h}{x}$. Отсюда $|EF|=\frac{ax}{h}$. Тогда площадь полоски ΔS примерно равна $\frac{ax}{h}\cdot\Delta x$:

$$\Delta S\approx\frac{ax}{h}\Delta x.$$

По закону Паскаля сила давления ΔP на рассматриваемую площадку ΔS вычисляется по формуле

$$\Delta P\approx\rho g x\cdot\frac{ax}{h}\Delta x=\frac{\rho g a}{h}x^2\Delta x.$$

Значит, $\frac{\Delta P}{\Delta x}\approx\frac{\rho g a}{h}x^2$, т. е. $P'=\frac{\rho g a}{h}x^2$. Искомая сила давления P жидкости на площадку ABC (она получается за счет перехода аргумента x от значения 0 до значения h) такова:

$$P=\int_0^h\frac{\rho g a}{h}x^2dx=\frac{\rho g a}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\rho g a h^2.$$

17. Дифференциальные уравнения вида $y'=f(y)$. Чтобы решить это уравнение, разделим обе его части на $f(y)$ (предполагая, конечно, что $f(y)\neq 0$). Получим уравнение

$$\frac{y'}{f(y)}=1. \qquad (1)$$

Если функция $F(x)$ — первообразная для $\frac{1}{f(x)}$, то функция $F(y)$ будет первообразной для $\frac{1}{f(y)}\cdot y'$, где y — функция от x (см. теорему из п. 15). Поскольку 1 — производная от функции x, то уравнение (1) можно переписать так:

$$(F(y))'=(x)'.$$

В пособии «Алгебра и начала анализа, 10» отмечено, что если две функции имеют одинаковые производные, то они отличаются лишь постоянным слагаемым. Отсюда следует, что $x=F(y)+C$.

Мы получили не выражение для y как функции от x, а выражение x как функции от y. Иногда из этого соотношения удается выразить y через x. Если это не удается, то ответ оставляют в виде $x=F(y)+C$ и говорят, что решение получено в неявной форме.

К виду $y'=f(y)$ относится рассмотренное в п. 1 уравнение показательного роста $y'=ky$. Имеем для этого уравнения $\frac{y'}{y}=k$, т. е. $(\ln y)'=(kx)'$, откуда находим:

$$\ln y=kx+\ln C,$$
$$\text{или } y=Ce^{kx}.$$

К виду $y'=f(y)$ относится и уравнение $y'=-k(y-\alpha)$, описывающее процесс выравнивания (см. п. 3). Имеем для этого уравнения $\frac{y'}{y-\alpha}=-k$, т. е. $(\ln(y-\alpha))'=(-kx)'$, откуда находим:

$$\ln(y-\alpha)=-kx+\ln C,$$
$$y-\alpha=Ce^{-kx}$$

и далее

$$y=\alpha+Ce^{-kx}.$$

Пример 11. Решим задачу об истечении жидкости из цилиндрического сосуда (см. пример 11 из п. 14).

Решение. Выше было составлено дифференциальное уравнение (см. уравнение (16) на с. 31): $-\pi R^2h'=k\sqrt{2gh}S$, где h — высота столба жидкости в сосуде в момент времени t. Преобразуем его к виду $-\frac{\pi R^2}{k\sqrt{2g}S}\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot h'=1$ и положим $A=\frac{\pi R^2}{k\sqrt{2g}S}$. Тогда уравнение примет более простой вид:

$$-A\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot h'=1.$$

Так как $h^{-\frac{1}{2}}\cdot h'=(2h^{\frac{1}{2}})'$, то это равенство можно записать в виде $(-2A\sqrt{h})'=1$, отсюда находим общее решение заданного уравнения:

$$-2A\sqrt{h}=t+C. \qquad (2)$$

Найдем значение C. Для этого используем начальные условия. В задаче сказано, что в начале истечения сосуд был полный, т. е. высота столба жидкости равнялась H. Иными словами, можно считать, что при $t=0$ было $h=H$. Подставляя в формулу (2) значения $t=0$, $h=H$, получаем, что $-2A\sqrt{H}=C$. Значит, равенство (2) можно переписать в виде

$$t=2A(\sqrt{H}-\sqrt{h}). \qquad (3)$$

Чтобы найти значение A, вспомним, что согласно условию задачи, за первые t_1 минут вытекла треть жидкости. Этому со-

ответствует понижение уровня жидкости на $\frac{H}{3}$. Иными словами, при $t=t_1$ имеем: $h=H-\frac{H}{3}=\frac{2}{3}H$. Подставив эти значения t и h в равенство (3), получим:

$$t_1=2A\left(\sqrt{H}-\sqrt{\frac{2}{3}H}\right),$$

и потому

$$A=\frac{t_1}{2\left(\sqrt{H}-\sqrt{\frac{2}{3}H}\right)}=\frac{3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{2\sqrt{H}}.$$

Теперь уже легко найти время опорожнения сосуда: нам надо найти такое значение t, при котором $h=0$:

$$t=2A\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}\right)=\frac{3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{H}}\left(\sqrt{H}-0\right)=3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Полученное значение t в $1+\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 1{,}82$ раза больше значения $3t_1$, которое получилось бы в предположении, что жидкость вытекает равномерно.

Разумеется, и это решение не является безукоризненно точным — мы пренебрегли, например, явлениями капиллярности (а они существенны, если диаметр отверстия очень мал), завихрениями жидкости, так называемым пограничным слоем (слоем жидкости вблизи стенок отверстия, на котором происходит переход значений скорости от нуля до v), и многими иными факторами. Но все же оно точнее, чем решение, основанное на предположении о равномерности истечения жидкости.

Пример 12. Решим задачу о падении парашютиста (см. пример 1 из п. 8).

Решение. Выше было составлено дифференциальное уравнение (см. уравнение (1) на с. 19): $my''=mg-ky'$, где искомая функция y выражает расстояние от положения парашютиста в начальный момент времени до его положения в момент времени t. Положим $y'=v$, тогда $y''=v'$ и уравнение можно преобразовать к виду $\frac{mv'}{mg-kv}=1$ и далее $-\frac{m}{k}\cdot\frac{v'}{v-\frac{mg}{k}}=1$, т. е. $\left(-\frac{m}{k}\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|\right)'=(t)'$, откуда находим общее решение уравнения

$$-\frac{m}{k}\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|=t-\frac{m}{k}\ln|C|$$

(здесь произвольную постоянную удобно записать в виде $-\frac{m}{k}\ln|C|$).

Далее имеем:

$$v-\frac{mg}{k}=Ce^{-\frac{k}{m}t}. \tag{4}$$

По условию задачи начальная скорость движения равна нулю, т. е. при $t=0$ имеем $v=0$. Подставив эти значения в равенство (4), находим, что $C=-\frac{mg}{k}$, и, следовательно, формулу (4) можно переписать в виде

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{5}$$

Отсюда следует, что с течением времени скорость падения парашютиста стремится к значению $v_{\text{пред}}=\frac{mg}{k}$.

Чтобы узнать закон движения парашютиста, надо по найденному значению скорости найти путь, пройденный к моменту времени t. Для этого перепишем равенство (5) в виде

$$y'=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

и решим полученное дифференциальное уравнение. Нужно найти первообразную для функции $\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. Ею будет функция $\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. Значит, общее решение уравнения таково:

$$y=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)+C. \tag{6}$$

Для отыскания значения C заметим, что при $t=0$ пройденный путь равен нулю, т. е. при $t=0$ имеем $y=0$. Подставив эти значения в равенство (6), получим: $0=\frac{m^2g}{k^2}+C$, т. е.

$$C=-\frac{m^2g}{k^2}.$$

Итак, закон движения парашютиста имеет вид:

$$y=\frac{mg}{k}\left(t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right).$$

18. Задача о движении пули.

Пример 13. Пуля, двигаясь со скоростью 400 м/с, пробивает стену толщиной 20 см и вылетает из нее со скоростью 100 м/с. Принимая, что сила сопротивления стены пропорциональна квадрату скорости движения пули, найдем время движения пули в стене.

Решение. Согласно второму закону Ньютона дифференциальное уравнение для скорости движения пули имеет вид:

$$mv' = -k_1 v^2,$$

где m — масса пули, k_1 — коэффициент пропорциональности, $v(t)$ — скорость.

Положим $\frac{k_1}{m} = k$ и преобразуем уравнение к виду

$$-\frac{1}{v^2} v' = k.$$

Имеем далее $\left(\frac{1}{v}\right)' = (kt)'$, откуда находим общее решение уравнения

$$\frac{1}{v} = kt + C_1. \tag{7}$$

Для отыскания значения C_1 воспользуемся начальным условием $v(0) = 400$. Подставив в равенство (7) значения $t = 0$, $v = 400$, получим: $C_1 = \frac{1}{400}$. Итак, $\frac{1}{v} = kt + \frac{1}{400}$, откуда

$$v = \frac{400}{1 + 400kt}, \tag{8}$$

т. е.

$$y' = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t + \frac{1}{400k}}. \tag{9}$$

Из последнего уравнения найдем $y(t)$ — закон движения пули. Для этого заметим, что первообразной функцией для $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t + \frac{1}{400k}}$ является $\frac{1}{k} \ln\left(t + \frac{1}{400k}\right)$. Значит, общее решение уравнения (9) можно записать в виде

$$y = \frac{1}{k} \ln\left(t + \frac{1}{400k}\right) + \frac{1}{k} \ln C,$$

т. е.

$$y = \frac{1}{k} \ln C\left(t + \frac{1}{400k}\right).$$

Для отыскания значения постоянной C воспользуемся начальным условием, а именно тем, что при $t=0$ было $y=0$. Получим: $0=\frac{1}{k}\ln\left(C\cdot\frac{1}{400k}\right)$, откуда находим, что $C=400k$. Итак, мы нашли закон движения пули в стене:

$$y=\frac{1}{k}\ln 400k\left(t+\frac{1}{400k}\right)=\frac{1}{k}\ln(1+400kt).$$

Подставив в это равенство значение $y=0{,}2$ (толщину стены), найдем время T движения пули в стене: $0{,}2=\frac{1}{k}\ln(1+400kT)$, откуда

$$T=\frac{e^{0,2k}-1}{400k}.$$

Нам осталось вычислить значение коэффициента k. Для этого воспользуемся условием задачи, согласно которому пуля вылетает из стены со скоростью 100 м/с. Это значит, что при $t=T$ имеем: $v=100$ м/с. Подставив в формулу (8) эти значения t и v, получим:

$$100=\frac{400}{e^{0,2k}}$$

и далее

$$e^{0,2k}=4,$$
$$0{,}2k=\ln 4,$$
$$k=5\ln 4.$$

Теперь мы уже можем найти числовое значение T. Имеем:

$$T=\frac{e^{0,2k}-1}{400k}=\frac{3}{2000\ln 4}\approx 0{,}001 \text{ с}.$$

19. Решение дифференциальных уравнений динамики химических процессов. Здесь мы рассмотрим решение уравнений, составленных выше для химических задач (см. п. 11).

Пример 14. Решим уравнение $y'=k(a-y)^2$ (см. уравнение (8) на с. 24).

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{y'}{(y-a)^2}=k. \qquad (10)$$

Поскольку $-\frac{1}{t-a}$ — первообразная для $\frac{1}{(t-a)^2}$, то первообразной для $\frac{y'}{(y-a)^2}$ будет $-\frac{1}{y-a}$, т. е. $\frac{1}{a-y}$. Значит, уравнение (10) можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{a-y}\right)'=(kt)',$$

откуда находим, что $\frac{1}{a-y}=kt+C$, т. е. $y=a-\frac{1}{kt+C}$.

Так как при $t=0$ количество возникшего вещества равно нулю, $y=0$, то $0=a-\frac{1}{C}$, и потому $C=\frac{1}{a}$. Значит,

$$y=a-\frac{a}{1+akt}.$$

Предел функции $a-\frac{a}{1+akt}$ при $t\to+\infty$ равен a, т. е. первоначальной концентрации реагентов. Это означает, что получается столько же молекул вещества, сколько было пар молекул реагентов, т. е. что реакция происходит полностью.

Пример 15. Решим уравнение $y'=k(a-y)(b-y)$ (см. уравнение (7) на с. 24).

Решение. Сначала покажем, как найти первообразную для функции $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$. Имеем:

$$\frac{1}{(t-a)(t-b)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(t-a)-(t-b)}{(t-a)(t-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t-b}-\frac{1}{t-a}\right).$$

Для $\frac{1}{t-b}$ первообразной будет $\ln|t-b|$, а для $\frac{1}{t-a}$ — $\ln|t-a|$. Значит, для $\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t-b}-\frac{1}{t-a}\right)$ первообразной будет $\frac{1}{b-a}(\ln|t-b|-\ln|t-a|)$, т. е. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{t-b}{t-a}\right|$. Теперь вернемся к нашему дифференциальному уравнению и преобразуем его к виду

$$\frac{y'}{(y-a)(y-b)}=k. \tag{11}$$

Так как для $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$ первообразной, как мы видели, служит $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{t-b}{t-a}\right|$, то для $\frac{y'}{(y-a)(y-b)}$ первообразной будет $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right|$. Значит, общее решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right|=kt+\frac{1}{b-a}\ln|C|.$$

Далее имеем:

$$\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right|=(b-a)kt+\ln|C|,$$

откуда

$$\frac{b-y}{a-y}=Ce^{(b-a)kt}.$$

И в этом случае при $t=0$ имеем $y=0$. Поэтому $\frac{b}{a}=C$, и, сле-

довательно, $\frac{b-y}{a-y}=\frac{b}{a}e^{(b-a)kt}$. Если $b<a$, то $b-a<0$, и потому функция $\frac{b}{a}e^{(b-a)kt}$ стремится к нулю при $t\to+\infty$. Это значит, что y стремится к значению b. Иными словами, в этом случае полностью прореагирует второе вещество, а концентрация первого вещества будет приближаться к значению $a-b$. Аналогично рассматривается случай, когда $a<b$.

Подобным образом решаются уравнения (9) и (10), составленные нами в примере 7 из п. 11.

20. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными. Как уравнения вида $y'=f(x)$, так и уравнения вида $y'=f(y)$ относятся к общему классу уравнений, имеющих вид

$$p(y)y'=q(x). \tag{12}$$

Поскольку правая часть уравнения (12) зависит только от x, а левая представляет собой произведение функции от y на производную y', такие уравнения называют *уравнениями с разделенными переменными.*

Решим уравнение (12). Пусть P — одна из первообразных для функции p, а Q — одна из первообразных для функции q. Тогда $P(y)$ является первообразной для $p(y)\cdot y'$, и потому уравнение (12) можно переписать в виде

$$(P(y))'=(Q(x))',$$

Откуда находим, что

$$P(y)=Q(x)+C.$$

Решение уравнения (12) можно оставить в полученной неявной форме, а можно, если удастся, выразить y через x.

Пример 16. Найдем решение уравнения

$$\cos y\cdot y'=1+x^2,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Заданное уравнение можно переписать в виде

$$(\sin y)'=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)',$$

откуда находим его общее решение

$$\sin y=x+\frac{x^3}{3}+C.$$

Чтобы найти значение постоянной C, подставим в это равенство начальное условие $x=0$, $y=\frac{\pi}{6}$. Получаем, что $\sin\frac{\pi}{6}=C$, откуда $C=\frac{1}{2}$. Значит, искомое частное решение записывается следующим образом:

а производная от y^2 равна $2y \cdot y'$. Это позволяет переписать уравнение (15) в виде

$$((y')^2)' = (-\omega^2 y^2)',$$

откуда находим:

$$(y')^2 = -\omega^2 y^2 + C.$$

Из полученного равенства следует, что постоянная C может быть только положительной. Учитывая это, запишем постоянную в более удобном для дальнейшего виде, а именно в виде $C_1^2\omega^2$.

Итак,

$$(y')^2 = -\omega^2 y^2 + C_1^2\omega^2,$$

откуда

$$y' = \pm\omega\sqrt{C_1^2 - y^2}$$

и далее

$$\frac{y'}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm\omega. \qquad (16)$$

Так как первообразной для $\frac{1}{\sqrt{C_1^2 - t^2}}$ является $\arcsin\frac{t}{C_1}$ (п. 15), то первообразной для $\frac{y'}{\sqrt{C_1^2 - y^2}}$ является $\arcsin\frac{y}{C_1}$. Это позволяет переписать уравнение (16) в виде

$$\left(\arcsin\frac{y}{C_1}\right)' = (\pm\omega t)',$$

откуда находим:

$$\arcsin\frac{y}{C_1} = \pm\omega t \pm \varphi.$$

(здесь произвольную постоянную мы обозначили $\pm\varphi$) и далее

$$\frac{y}{C_1} = \pm\sin(\omega t + \varphi),$$

$$y = A\sin(\omega t + \varphi).$$

(вместо $\pm C$ мы ввели обозначение A).

Итак, общее решение уравнения (14) имеет вид:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Это закон гармонических (синусоидальных) колебаний, поэтому уравнение (14) обычно называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Это решение можно записать иначе:

$$y = A(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi).$$

Обозначив $A\cos\varphi$ через C_1, $A\sin\varphi$ через C_2, получим запись решения в виде

$$y = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t.$$

Выше, решая задачу о движении фантастического тела в туннеле, соединяющем Северный полюс с Южным по диаметру Земли (см. пример 3 из п. 8), мы пришли к уравнению $y'' =$

$= -\frac{gy}{R}$. Это уравнение гармонических колебаний (достаточно переписать уравнение в виде $y'' + \frac{g}{R} y = 0$ и положить $\frac{g}{R} = \omega^2$). Значит, наше фантастическое тело будет совершать гармонические колебания.

Рассматривая выше задачу о колебании математического маятника (см. пример 4 из п. 8), мы составили следующее дифференциальное уравнение:

$$l\varphi'' = -g \sin \varphi. \qquad (17)$$

Если φ — достаточно малый угол, то $\sin \varphi \approx \varphi$ и уравнение (17) можно заменить уравнением $\varphi'' + \frac{g}{l} \varphi = 0$. Это тоже уравнение гармонических колебаний, т. е. величина угла φ меняется по синусоидальному закону.

22. Вычисление второй космической скорости. Пусть с поверхности Земли стартует ракета с начальной скоростью v_0. Если скорость относительно мала, то, взлетев на некоторую высоту, ракета под действием силы тяжести (сопротивлением воздуха мы будем пренебрегать) упадет на Землю. Законы механики позволили определить так называемую первую космическую скорость v_1, т. е. такую начальную скорость движения ракеты, при которой ракета, запущенная в горизонтальном направлении из точки, находящейся над поверхностью Земли, начинает вращаться по круговой орбите в виде спутника. Расчеты показали, что $v_1 = 7{,}90$ км/с.

Найдем теперь значение начальной скорости v_2, при котором вертикально поднимающаяся вверх ракета сможет оказаться на сколь угодно большом расстоянии от Земли. Это значение v_2 называют *второй космической скоростью.*

Выше (см. пример 2 из п. 8) было показано, что дифференциальное уравнение движения ракеты в рассматриваемом случае имеет вид:

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}.$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, R — радиус Земли, а $y(t)$ — расстояние ракеты от центра Земли в момент времени t.

Для решения этого уравнения применим тот же прием, что был использован в предыдущем пункте для решения уравнения гармонических колебаний: умножим обе части уравнения на $2y'$. Тогда уравнение примет вид:

$$2y'y'' = -\frac{2gR^2}{y^2} y',$$

или

$$((y')^2)' = \left(2gR^2 \cdot \frac{1}{y}\right)',$$

откуда находим, что

$$(y')^2 = \frac{2gR^2}{y} + C.$$

Но $y' = v$, значит,

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + C. \tag{18}$$

Для отыскания C воспользуемся начальными условиями, а именно тем, что в момент времени $t=0$ ракета стартует с поверхности Земли с начальной скоростью $v=v_2$ и находится от центра Земли на расстоянии $y=R$. Подставив указанные значения v и y в равенство (18), получим:

$$v_2^2 = \frac{2gR^2}{R} + C,$$

откуда находим:

$$C = v_2^2 - 2gR.$$

При этом C равенство (18) принимает вид:

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + v_2^2 - 2gR. \tag{19}$$

Если ракета может подняться на любую высоту y, то значение $\frac{2gR^2}{y}$ может стать сколь угодно малым. Тогда из равенства (19) следует, что должно выполняться неравенство $v_2^2 - 2gR \geqslant 0$. Наименьшее значение v_2, при котором будет выполняться это неравенство, равно $\sqrt{2gR}$.

Итак, вторая космическая скорость вычисляется по формуле $v_2 = \sqrt{2gR}$. Так как $R = 6370$ км, $g = 0{,}00981$ км/с^2, то

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}00981 \cdot 6370} \approx 11{,}19 \text{ км/с}.$$

23. Нахождение численности организмов данной колонии.

Пример 19. Решим дифференциальное уравнение

$$y' = \alpha y - \beta y^2,$$

к которому мы пришли выше (см. п. 12), решая задачу о численности y организмов данной колонии, развивающейся в изоляции (т. е. без учета хищников) на ограниченном жизненном пространстве (т. е. с учетом внутренних конфликтных ситуаций из-за жизненных ресурсов). Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ численность организмов колонии равна y_0, т. е. $y(0) = y_0$.

Решение. Перепишем уравнение $y' = \alpha y - \beta y^2$ следующим образом:

$$\frac{y'}{y\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right)} = -\beta.$$

Замечаем, что это уравнение вида (11) из п. 19, где $a=0$, $b=\frac{\alpha}{\beta}$ и $k=-\beta$. Значит, ответ можно записать в виде $\frac{y-b}{y-a}=Ce^{(b-a)kt}$ (см. с. 46), т. е.

$$\frac{y-\frac{\alpha}{\beta}}{y}=Ce^{-\alpha t}.$$

Выразим из этого соотношения переменную y:

$$y=\frac{\alpha}{\beta(1-Ce^{-\alpha t})}. \qquad (20)$$

Для отыскания C воспользуемся начальным условием $y(0)=y_0$. Получим: $y_0=\frac{\alpha}{\beta(1-C)}$, откуда находим: $C=1-\frac{\alpha}{\beta y_0}$. Подставив это значение C в равенство (20) и произведя необходимые упрощения, получим:

$$y=\frac{\alpha y_0}{\beta y_0+(\alpha-\beta y_0)e^{-\alpha t}}. \qquad (21)$$

Введем следующие обозначения: $a=\beta y_0$, $b=\alpha-\beta y_0$, и заметим, что $a>0$. Кроме того, по смыслу задачи можно считать, что коэффициент α существенно больше коэффициента β, причем настолько больше, что $\alpha-\beta y_0>0$, т. е. $b>0$. Теперь мы можем равенство (21) переписать в более простом виде:

$$y=\frac{(a+b)y_0}{a+be^{-\alpha t}}=\frac{(a+b)y_0e^{\alpha t}}{b+ae^{\alpha t}}.$$

Если b значительно больше, чем a, то при малых значениях t знаменатель приблизительно равен $a+b$, и потому y возрастает по закону, мало отличающемуся от закона показательного роста $y\approx y_0e^{\alpha t}$. При больших значениях t слагаемое $ae^{\alpha t}$ становится значительно больше, чем b, и тогда значение y приблизительно равно значению $\frac{(a+b)y_0e^{\alpha t}}{ae^{\alpha t}}$, т. е. $y_0\frac{a+b}{a}$. График функции y изображен на рис. 15. На этом рисунке наглядно видно, как происходит переход от показательного роста к процессу выравнивания. Такой закон роста называют *логистическим*, кривую — *логистической кривой*.

Пример 20. Решая в п. 12 задачу о хищниках и жертвах, мы получили систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'=\alpha y-\beta xy, \\ x'=\gamma xy-\delta x. \end{cases} \qquad (22)$$

Здесь y — число жертв, x — число хищников, а производные y' и x' берутся по времени t. Найдем зависимость между x и y.

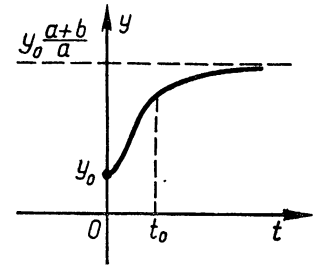

Рис. 15

Р е ш е н и е. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y_t' = y_x' \cdot x_t'$. Поэтому $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$. Тогда из системы (22) выводим, что

$$\frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\alpha y - \beta x y}{\gamma x y - \delta x}, \text{ т. е. } y' = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(\gamma y - \delta)}.$$

Имеем далее:

$$\frac{\gamma y - \delta}{y} y' = \frac{\alpha - \beta x}{x},$$

т. е.

$$\left(\gamma - \frac{\delta}{y}\right) y' = \frac{\alpha}{x} - \beta.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$(\gamma y - \delta \ln y)' = (\alpha \ln x - \beta x)'.$$

Значит,

$$\gamma y - \delta \ln y = \alpha \ln x - \beta x + \ln C,$$

т. е.

$$\ln C x^{\alpha} e^{-\beta x} = \ln e^{\gamma y} \cdot y^{-\delta},$$

или

$$C x^{\alpha} e^{-\beta x} = y^{-\delta} e^{\gamma y}.$$

Этим равенством и связаны число жертв y и число хищников x. Значение C определяется начальными значениями x и y.

24. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Многие задачи в процессе своего решения сводятся к дифференциальным уравнениям вида

$$y' + p(x) y = q(x). \tag{23}$$

Поскольку в эти уравнения и искомая функция, и ее производная входят в первой степени (линейно), их называют линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Например, линейным является составленное в п. 10 дифференциальное уравнение для расчета силы тока в простейшей электрической цепи (см. уравнение (6) на с. 23) — ниже мы вернемся к этому уравнению. В настоящем пункте мы рассмотрим метод решения уравнения (23).

Если $P(x)$ — первообразная для функции $p(x)$, то производная от функции $e^{P(x)} \cdot y$ имеет вид:

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = e^{P(x)} \cdot P'(x) \cdot y + e^{P(x)} \cdot y' = e^{P(x)} (p(x) y + y').$$

Так как выражение в последних скобках совпадает с левой частью уравнения (23), то ясно, что для решения этого уравнения надо обе его части умножить на $e^{P(x)}$. Тогда оно примет вид:

$$e^{P(x)} (y' + p(x) y) = q(x) e^{P(x)},$$

т. е.

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = q(x) e^{P(x)}.$$

Если $S(x)$ — первообразная для $q(x)e^{P(x)}$, то получаем:

$$(e^{P(x)}\cdot y)'=(S(x))'.$$

Значит, $e^{P(x)}y=S(x)+C$, и потому

$$y=e^{-P(x)}\cdot(S(x)+C). \tag{24}$$

Итак, чтобы решить линейное уравнение (23), нужно:

а) найти первообразную $P(x)$ для функции $p(x)$;

б) найти первообразную $S(x)$ для функции $q(x)\cdot e^{P(x)}$;

в) записать ответ в виде (24).

Пример 21. Решим уравнение

$$y'-\frac{3y}{x}=x^3 \quad (x>0). \tag{25}$$

Решение. Это линейное уравнение. Здесь $p(x)=-\frac{3}{x}$, $q(x)=x^3$. Воспользуемся намеченным выше планом решения.

а) Первообразная $P(x)$ для $-\frac{3}{x}$ имеет вид: $-3\ln x$.

б) Рассмотрим функцию $q(x)\cdot e^{P(x)}$, т. е. $x^3\cdot e^{-3\ln x}=x^3\cdot(e^{\ln x})^{-3}=x^3\cdot x^{-3}=1$. Первообразной для 1 является x, значит, $S(x)=x$.

в) Запишем ответ в виде (24):

$$y=e^{3\ln x}(x+C)=x^3(x+C)=x^4+Cx^3.$$

Итак, общее решение уравнения (25) имеет вид:

$$y=x^4+Cx^3.$$

Пример 22. Решим дифференциальное уравнение для расчета силы тока в простейшей электрической цепи $E=RI+LI'$ для случая синусоидальной э. д. с.: $E(t)=E_0\sin\omega t$, считая, что в начальный момент времени (т. е. при $t=0$) сила тока равна нулю (момент включения тока).

Решение. Преобразуем уравнение к виду $I'+\frac{R}{L}I=\frac{E_0}{L}\sin\omega t$ и положим: $\frac{R}{L}=a$, $\frac{E_0}{L}=b$. Получим:

$$I'+aI=b\sin\omega t.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решим его по выработанному выше плану. Здесь $p(t)=a$, $g(t)=b\sin\omega t$.

а) Найдем первообразную $P(t)$ для функции $p(t)=a$. Имеем: $P(t)=at$.

б) Найдем первообразную $S(t)$ для функции $b\sin\omega te^{at}$. Это будет $\frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)$ (проверьте сами, что это так).

в) Запишем ответ в виде (24):

$$I=e^{-at}\left(\frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+C\right).$$

Воспользуемся начальным условием $I(0)=0$. Получим: $0=C+\frac{b}{a^2+\omega^2}\cdot(-\omega)$, откуда находим, что $C=\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}$.

Далее имеем:

$$I=e^{-at}\left(\frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}\right)=$$

$$=\frac{b}{a^2+\omega^2}\cdot(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}e^{-at}=$$

$$=\frac{b}{a^2+\omega^2}\cdot\sqrt{a^2+\omega^2}\sin(\omega t-\alpha)+\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}e^{-at}$$

(здесь $\frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=\sin\alpha$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=\cos\alpha$).

Итак,

$$I=\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}e^{-at}+\frac{b}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha).$$

Из полученной формулы видим, что в установившемся режиме, т. е. при $t\to+\infty$ в случае синусоидальной э. д. с. источника тока, сила тока будет также синусоидальной:

$$I=\frac{b}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha).$$

25. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. К дифференциальным уравнениям с разделенными переменными (см. п. 20) сводятся некоторые другие типы дифференциальных уравнений первого порядка. Например, к ним сводятся уравнения вида $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ — их называют *однородными уравнениями* первого порядка.

Пример 23. Решим дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}},\qquad(26)$$

составленное для отыскания кривой с постоянным углом резания (см. пример 9 из п. 13).

Решение. Положим $u=\frac{y}{x}$, тогда $y=ux$, и по правилу вычисления производной произведения находим:

$$y'=(ux)'=u'x+u\cdot1=u'x+u.$$

Подставив в уравнение (26) $u'x+u$ вместо y' и u вместо $\frac{y}{x}$, получим:

$$u'x+u=\frac{k+u}{1-ku}$$

и далее

$$u'x=\frac{k+u}{1-ku}-u,$$

$$u'x=\frac{k(1+u^2)}{1-ku},$$

$$\frac{1-ku}{1+u^2}u'=\frac{k}{x}. \qquad (27)$$

Получилось уравнение с разделенными переменными. Для его решения нам прежде всего нужно найти первообразную для $\frac{1-kx}{1+x^2}$. Имеем:

$$\frac{1-kx}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{kx}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{k}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{k}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}.$$

Первообразной для $\frac{1}{1+x^2}$ является $\operatorname{arctg} x$ (см. п. 12), а для $\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}$ — $\ln(1+x^2)$. Значит, для функции $\frac{1-kx}{1+x^2}$ первообразной будет $\operatorname{arctg} x-\frac{k}{2}\ln(1+x^2)$. Но в таком случае первообразной для $\frac{1-ku}{1+u^2}\cdot u'$ будет $\operatorname{arctg} u-\frac{k}{2}\ln(1+u^2)$.

Теперь мы можем переписать уравнение (27) в виде

$$\left(\operatorname{arctg} u-\frac{k}{2}\ln(1+u^2)\right)'=(k\ln|x|)',$$

откуда получаем:

$$\operatorname{arctg} u-\frac{k}{2}\ln(1+u^2)=k\ln|x|-k\ln|C|,$$

или

$$\operatorname{arctg} u=\frac{k}{2}\ln\frac{x^2(1+u^2)}{C^2}.$$

Подставив $\frac{y}{x}$ вместо u, получим:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{k}{2}\ln\frac{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}{C^2},$$

или

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{k}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{C^2},$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=k\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}.$$

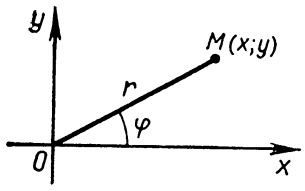

Рис. 16

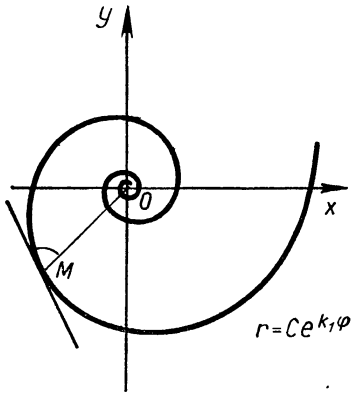

Рис. 17

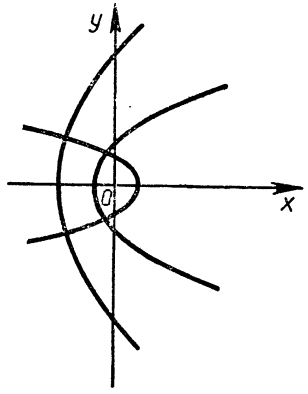

Рис. 18

Пусть $M(x;\ y)$ — точка координатной плоскости. Тогда $\sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние r между точками M и O, а $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\varphi$ есть угол между радиус-вектором OM и осью абсцисс (рис. 16). С помощью обозначений r и φ полученное выше общее решение уравнения (27) можно записать в виде $\varphi=k\ln\frac{r}{C}$, откуда получаем:

$$r=Ce^{k_1\varphi}, \qquad (28)$$

где $k_1=\frac{1}{k}$.

Таким образом, для искомой кривой связь между r и φ имеет вид (28). Эту кривую называют *логарифмической спиралью* (рис. 17).

Аналогично (но с более сложными выкладками) решается уравнение

$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-(y')^2},$$

составленное нами в примере 8 из п. 12 для отыскания такой кривой, что после отражения в этой кривой пучок параллельных прямых собирается в одной точке (рис. 9). Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y^2=C^2+2Cx.$$

Это параболы, для которых осью симметрии служит ось Ox (рис. 18). После отражения в такой параболе пучок параллельных прямых собирается в одной точке. Верно и обратное: если в указанной точке поместить источник света, то лучи после отражения от параболы пойдут параллельным пучком. Этот факт имеет важное практическое значение. Так, в прожекторах отражающая поверхность является параболоидом, т. е. фигурой, получающейся от вращения параболы вокруг оси симметрии.

Упражнения

18. Найти общие решения уравнений:

а) $y'=\sin x+\cos x$; б) $y'=\frac{x^4-1}{x^3}$; в) $(y')^2-5y'+6=0$.

19. Найти общие решения уравнений:

а) $y'=2y$; б) $y'=-\frac{1}{3}y$; в) $y'=y^2$; г) $y'=\operatorname{tg} y$.

Найти общие решения уравнений:

20. а) $yy'=x+1$; б) $y'\sqrt{y}=\sin x$; в) $y'=xy$.

21. а) $y'=\frac{3x}{y}$; б) $y'=e^{2x-4y}$; в) $2xyy'=y^2-1$.

22. Найти частные решения уравнений при заданных начальных условиях:

а) $y'=2\sqrt{y}$, $y(0)=1$;

б) $y'+y\sin 2x=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

в) $(1+x^3)y'=3x^2y$, $y(0)=2$;

г) $y'=\frac{2y}{x}$, $y(1)=1$.

23. Найти общие решения заданных линейных дифференциальных уравнений:

а) $y'+\frac{y}{x}=1$; б) $y'-3y=2e^x$.

24. Найти частные решения линейных уравнений при заданных начальных условиях:

а) $2y'-y=e^x$, $y(0)=5$;

б) $x^2y'+5xy+4=0$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=62$.

25. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

26. Материальная точка массы m движется по прямой под действием силы, изменяющейся по закону $f(t)=A\cos\omega t$. Найти закон движения точки, если в момент времени $t=0$ ее начальная скорость и координата равны нулю.

27. Найти кривую, проходящую через точку $P(-1, 1)$, если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания (см. упр. 15).

28. Найти кривую, проходящую через точку $P(1, 2)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy (см. упр. 16).

29. Найти кривую, расстояние любой точки которой от начала координат равно длине отрезка касательной к кривой в этой точке от рассматриваемой точки до точки пересечения с осью абсцисс (см. упр. 17).

ОТВЕТЫ

1. $30 \log_2 100$ дн. **2.** $\frac{m_0}{\sqrt[10]{2}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{2}}$, $\frac{m_0}{4}$. **3.** $y=y_0e^{kt}$, $k>0$. **4.** $y(t)=2^{\frac{t-5}{2}}$ кг; $y_0=\frac{1}{4\sqrt{2}}$ кг. **5.** 60 минут. **6.** $S(t)=25\cdot 2^{\frac{t}{5}}$ м. **8.** $A=2$. **9.** $\omega=100\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^t$ об/мин. **11.** $1\frac{3}{32}$. **12.** 0,32 м/с. **13.** $\frac{1}{1024}$. **14.** $v=\left(\frac{m}{k}g+v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}$. **15.** $y'=y^2$. **16.** $2y'x=y$. **17.** $y'=-\frac{y}{x}$. **18.** а) $y=-\cos x+\sin x+C$; б) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}+C$; в) $y=2x+C$, $y=3x+C$. **19.** а) $y=Ce^{2x}$; б) $y=Ce^{-\frac{1}{3}x}$; в) $y=-\frac{1}{x+C}$; г) $\sin y=Ce^x$. **20.** а) $y=\pm\sqrt{x^2+2x+C}$; б) $y=\left(\frac{3}{2}(C-\cos x)\right)^{\frac{2}{3}}$; в) $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$. **21.** а) $y=\pm\sqrt{3x^2+C}$; б) $y=\frac{1}{4}\ln(2e^{2x}+C)$; в) $y=\pm\sqrt{Cx+1}$. **22.** а) $y=(x+1)^2$; б) $y=e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$; в) $y=2(1+x^3)$; г) $y=x^2$. **23.** а) $y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$; б) $y=Ce^{3x}-e^x$. **24.** а) $y=e^x+4e^{\frac{x}{2}}$; б) $y=\frac{2-x^4}{x^5}$. **25.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **26.** $x=\frac{A}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$. **27.** $y=-\frac{1}{x}$. **28.** $y^2=4x$. **29.** $y=\frac{C}{x}$.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. ЗАЧЕМ НУЖНЫ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Многие из вас неоднократно слышали о том, что, помимо хорошо всем известных действительных, вещественных чисел, в математике рассматриваются еще и некоторые таинственные комплексные числа — числа мнимые, воображаемые. Эти числа представляются настолько необычными, странными и сложными, что даже не упоминаются в школьных учебниках, и лишь в отдельных утверждениях можно уловить намек на существование каких-то других, не действительных чисел.

Например, иногда говорят, что квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней, хотя можно было бы сказать и короче — оно не имеет корней. Часто можно услышать, что алгебраическое уравнение имеет столько корней, какова его степень. И хотя с точки зрения школьного курса это утверждение явно неверно — даже для квадратных уравнений,— оно становится справедливым именно при рассмотрении комплексных чисел (и при должном уточнении понятия «число корней»).

Между тем в теории комплексных чисел нет ничего мнимого и воображаемого, и даже более того: в известной степени понятие комплексного числа более просто, чем понятие действительного числа. Строгое определение комплексных чисел и правил обращения с ними, как мы ниже убедимся, требует значительно меньшего уровня математических знаний и математической культуры, чем построение понятия действительного числа на том же уровне строгости. Отметим, что строгая теория действительных чисел вообще не изучается в школе из-за ее настоящей, объективной сложности.

Наибольшее удивление школьников, знающих о существовании комплексных чисел лишь понаслышке, вызывает равенство $i^2 = -1$. Ведь «хорошо известно», что квадрат числа не может быть отрицательным! Это возражение, однако, лишено логических оснований: квадрат *действительного числа* не может, конечно, быть отрицательным. Но почему это свойство действительных чисел должно быть справедливым и в более широком множестве комплексных чисел? Не удивляет же нас тот факт, что квадрат рационального числа не может быть равен 2, тогда как действительное число с таким свойством существует — это иррациональное число $\sqrt{2}$.

Нельзя поэтому возражать против рассмотрения комплексных чисел на том лишь основании, что «таких чисел не может быть», или на этом же основании считать их слишком сложными или странными. Но тогда немедленно встает вопрос: а надо ли изучать числа со свойствами, столь непохожими на свойства «нормальных» действительных чисел?

Вряд ли кто-нибудь сомневается в том, что никакая математическая теория не создается и не разрабатывается, если она не имеет серьезных приложений на практике или внутри самой математики. Так вот комплексные числа находят широкое применение в электротехнике, гидро- и аэромеханике, физике, геометрии и во многих других областях науки и техники.

Наш курс не предоставляет, к сожалению, возможностей для того, чтобы дать достаточное представление об этих приложениях — мы вынуждены ограничиться, по существу, азбукой комплексных чисел. Однако рамки курса позволяют все же показать применение комплексных чисел внутри школьной и не школьной математики, и это уже само по себе служит известным «оправданием» их изучения.

Главный аргумент в пользу изучения комплексных чисел состоит в том, что с их помощью можно решать задачи, которые трудно решить иными средствами, т. е. оставаясь в рамках теории действительных чисел. Другими словами, наличие в арсенале математика комплексных чисел расширяет его возможности в решении задач.

Рассмотрим теперь ряд задач, в которых эффективно используются комплексные числа. Мы начнем с задач чисто школьного содержания — эти задачи могут быть решены, конечно, и без привлечения аппарата комплексных чисел, но для их элементарного решения требуются более сложные рассуждения и вычисления, бóльшая изобретательность, чем при «стандартном» применении комплексных чисел.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin\alpha, \\ \cos x+\cos y=\cos\alpha. \end{cases}$$

2. Выяснить, при каких $n\in\mathbf{Z}$ число $n^{44}+n+1$ — простое.

3. Доказать, что при любых натуральных p, q число $(p+1)^{2q+1}+p^{q+2}$ делится на p^2+p+1.

4. Можно ли многочлен x^4+x^2+1 представить в виде суммы квадратов двух многочленов?

5. Разложить на множители многочлены:

$$x^5+x+1,\ x^{10}+x^5+1,\ x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1.$$

6. Имеются ли на окружности радиуса $65\sqrt{5}$ с центром в начале координат точки с целыми координатами?

7. Доказать, что сумма произведений длин противополож-

ных сторон вписанного четырехугольника равна произведению длин его диагоналей.

(Это утверждение называется *теоремой Птолемея.*)

8. Указать на плоскости множество точек, для которых сумма квадратов расстояний до вершин заданного правильного многоугольника равна d.

9. При перемещении f точки A и B переходят друг в друга. Найти образ произвольной точки плоскости при перемещении f.

10. Точки A, B, C являются вершинами правильного треугольника. К произвольной точке плоскости сначала применяется центральная симметрия Z_A, к образу применяется центральная симметрия Z_B, к новому образу — центральная симметрия Z_C, затем Z_A и т. д. Какие точки M на некотором шагу «вернутся на место»?

11. Разложить на линейные и квадратичные множители многочлен x^n-1.

Укажем теперь некоторые более содержательные задачи, представляющие настоящий интерес как для самой математики, так и для ее приложений.

А. В школьной геометрии рассматриваются следующие три вида перемещений плоскости: параллельный перенос, поворот и осевая симметрия (центральная симметрия является, как известно, частным случаем поворота).

Возникает естественный вопрос: *существуют ли другие виды перемещений?* В частности, *какие перемещения можно получить с помощью композиций указанных трех видов перемещений?*

Знание ответа на эти вопросы имеет большое значение для геометрии и может принести большую пользу при решении конкретных задач.

Б. При решении различных математических задач часто возникают последовательности, заданные, как говорят, *рекуррентным образом.* Это означает, что задано некоторое число k ее первых членов *(начальные условия)* и указана формула, выражающая каждый член, начиная с $(k+1)$-го через k предыдущих (рекуррентная формула).

Частные случаи таких последовательностей рассматриваются в школьном курсе — это арифметическая и геометрическая прогрессии. В качестве примера можно привести также последовательность так называемых чисел Фибоначчи, определяемую начальными условиями $u_1=1$, $u_2=1$ и рекуррентной формулой

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Одна из главных задач, возникающих при изучении рекуррентных последовательностей,— это нахождение формулы общего члена. В математике уже разработан метод решения этой задачи для так называемых линейных рекуррентных последо-

вательностей, т. е. для того случая, когда рекуррентная формула имеет вид:

$$u_{n+k}=p_1u_{n+k-1}+p_2u_{n+k-2}+\ \dots\ +p_ku_n,$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — произвольные числа. Мы покажем этот метод для последовательностей второго порядка, т. е. при $k=2$; общий прием совершенно аналогичен.

Пусть последовательность (u_n) задается рекуррентной формулой

$$u_{n+2}=pu_{n+1}+qu_n \tag{1}$$

и некоторыми начальными условиями. Будем искать ее общий член u_n в виде $u_n=\lambda^n$, где λ — некоторое число. Тогда

$$u_{n+2}=\lambda^{n+2},\ u_{n+1}=\lambda^{n+1},\ u_n=\lambda^n,$$

и после их подстановки в (1) и сокращения на λ^n получим равенство

$$\lambda^2=p\lambda+q,$$

так что λ является корнем квадратного уравнения

$$x^2-px-q=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* рекуррентной формулы (1). Таким образом, если характеристическое уравнение имеет хотя бы один корень α, то мы можем указать последовательность (α^n), удовлетворяющую равенству (1).

Задача наша, разумеется, еще не решена и в этом случае, поскольку последовательность (α^n) может и не удовлетворять заданным начальным условиям. Полное решение этой задачи мы приведем в § 4.

Но что делать, если характеристическое уравнение не имеет корней? Это имеет место, например, для такой простой рекуррентной формулы, как

$$u_{n+2}=-u_n. \tag{3}$$

Ее характеристическое уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней, и изложенный только что метод к этой формуле неприменим.

Ниже мы увидим, что именно введение комплексных чисел позволяет найти выход из положения. В множестве комплексных чисел всякое квадратное уравнение и вообще алгебраическое уравнение любой степени имеют корни, и это позволяет решить рассматриваемую задачу в общем случае, причем все тем же изложенным только что методом.

В. В теории дифференциальных уравнений — одной из важнейших прикладных ветвей математики — важное значение имеют так называемые *линейные уравнения с постоянными коэффициентами*, т. е. уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_n=f(x), \tag{4}$$

где y — неизвестная функция, y', y'', ..., $y^{(n)}$ — ее последовательные производные, a_1, a_2, ..., a_n — некоторые числа, $f(x)$ — заданная функция.

Частные случаи таких уравнений рассматриваются в школьном курсе: это уравнение $y''=-\omega^2 y$ гармонических колебаний, уравнение $y'=ky$ показательного роста. Уравнения такого вида возникают и в физике, например уравнения для силы тока или заряда в колебательном контуре.

Мы будем рассматривать сейчас только однородные уравнения вида (4), для которых $f(x)=0$. Метод решения таких уравнений совершенно аналогичен, как это ни странно на первый взгляд, методу нахождения общего члена рекуррентных последовательностей, рассмотренному в пункте Б.

Будем искать неизвестную функцию в виде $y=e^{\lambda x}$, где $\lambda\in\mathbf{R}$. Тогда

$$y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x},$$

и после подстановки в уравнение (4) и сокращения на $e^{\lambda x}$ мы придем к равенству

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-2}\lambda^2+a_{n-1}\lambda+a_n=0,$$

так что λ является корнем уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5), как и в случае рекуррентных последовательностей, называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (4). Таким образом, если характеристическое уравнение имеет хотя бы один корень α, то мы можем указать решение $y=e^{\alpha x}$ дифференциального уравнения (4). Если же корней нет, то изложенный метод неприменим. Это не означает, конечно, что соответствующее дифференциальное уравнение не имеет решений, и ниже мы найдем их с помощью комплексных чисел.

Заметим, что именно такое положение возникает в «школьных» уравнениях

$$y''=-\omega^2 y,\ Q''=-\frac{1}{LC}\,Q.$$

Характеристическое уравнение $x^2+\omega^2=0$ для первого из этих уравнений не имеет корней, что не мешает, конечно, самому дифференциальному уравнению иметь решения — функции вида

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x, \qquad (6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные действительные числа.

В этом частном случае мы видим, что уравнение не имеет «показательных» решений, но имеет решения «тригонометрические». Один из наиболее впечатляющих фактов теории комплексных чисел, точнее говоря, теории функций комплексного пе-

ременного, состоит в том, что тригонометрические функции синус и косинус являются, грубо говоря, показательными.

Нельзя не подчеркнуть также, что и саму формулу (6) мы получим, пытаясь найти решения уравнения $y''=-\omega^2 y$ именно в виде показательной функции.

В пунктах А, Б, В мы привели задачи, при решении которых ярко видно применение комплексных чисел как аппарата. В каждой из этих задач условия не имеют никакого отношения к комплексным числам, однако эти числа появляются в процессе решения. В конце решения комплексные числа «исчезают», и полученный результат формулируется только в терминах действительных чисел.

Отметим еще, что в задачах Б и В возникает и еще одна проблема — *решение алгебраических уравнений произвольной степени.* Решение этой проблемы требует, в свою очередь, специального изучения многочленов, т. е. выражений вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n.$$

С другой стороны, теория многочленов также принимает наиболее стройный вид именно при изучении комплексных чисел в силу того, что, как мы уже отмечали, в множестве комплексных чисел всякий многочлен имеет корни.

§ 2. МНОГОЧЛЕНЫ

1. Основные определения. Основное понятие теории многочленов — многочлен от одного переменного — рассматривается в школьном курсе. Под многочленом понимается выражение вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n — произвольные действительные числа. Это выражение может состоять и из одного слагаемого — такой многочлен называется, естественно, одночленом. Ниже мы сделаем еще некоторые уточнения, касающиеся многочленов нулевой степени и нулевого многочлена.

Степень многочлена. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n$ — произвольный многочлен. В этой записи мы не требуем обязательно, чтобы коэффициент a_0 был отличен от 0, но если он все же отличен от 0, то число n называется *степенью* многочлена $f(x)$. Степень многочлена $f(x)$ часто обозначается через $\deg f(x)$.

Например,

$$\deg(-2x^2-3x)=2,$$
$$\deg(0x^5+0x^4-x^3)=3.$$

Рассмотрим специально два случая, когда многочлен $f(x)$ в действительности не содержит x. Это может случиться, если коэффициенты многочлена $f(x)$ равны 0 — в этом случае мы

будем называть многочлен *нулевым* и обозначать его символом 0. Если же

$$f(x)=a_0\neq 0$$

многочлен $f(x)$ имеет степень 0.

Таким образом, кроме обычных многочленов, действительно содержащих x, мы рассматриваем многочлены нулевой степени,— это просто числа, отличные от 0, и нулевой многочлен — это многочлен, равный 0 и не имеющий степени.

Напомним, что при $a_0\neq 0$ коэффициент a_0 называют *старшим коэффициентом* многочлена $f(x)$, а сам одночлен a_0x^n — его *старшим членом*. Коэффициент a_n называется *свободным членом*.

Если

$$f(x)=a_0x^n+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n,\quad g(x)=b_0x^k+\ \ldots\ +b_{k-1}x+b_k—$$

два произвольных многочлена соответственно степеней n и k, (т. е. $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$), то при их перемножении мы получим, очевидно, многочлен со старшим членом $a_0b_0x^{n+k}$. Отсюда следует важное утверждение:

степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме степеней сомножителей.

Ясно, что это утверждение верно и для любого конечного числа многочленов. Из него следует, в частности, что произведение ненулевых многочленов не может быть равно 0, или, что то же самое,

$$f(x)g(x)=0\Rightarrow f(x)=0 \text{ или } g(x)=0\ ^1. \qquad (2)$$

Что же касается суммы двух многочленов, то о ее степени можно сделать в общем случае лишь одно заключение:

степень суммы многочленов не превосходит наибольшей из степеней слагаемых.

В самом деле, при сложении многочленов разных степеней после приведения подобных слагаемых сохранится старший член одного из слагаемых, а при сложении многочленов одной степени их старшие члены могут и взаимно уничтожиться, отчего степень суммы, естественно, уменьшится.

Значения многочлена, корни многочлена. Вместо переменной x в многочлен $f(x)$, т. е. в выражение вида (1), можно, очевидно, подставить любое действительное число c. В результате получится некоторое действительное число; это число называется значением многочлена $f(x)$ при $x=c$ (или в точке c) и обозначается через $f(c)$:

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}c+a_n.$$

---

[1] Подчеркнем, что равенство $f(x)=0$ означает, что $f(x)$ — нулевой многочлен.

Отметим два простых равенства, связанные со значениями многочлена и полезные для решения задач:

$$f(0)=a_n,\ f(1)=a_0+a_1+\ \ldots\ +a_{n-1}+a_n,$$

т. е. свободный член многочлена является его значением в точке 0, а сумма коэффициентов многочлена есть его значение в точке 1.

Так, после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$f(x)=(2x^2-3x+1)^{1980}+(2x^3+3x-4)^{1981}$$

получится многочлен со свободным членом $f(0)=1-4^{1981}$ и суммой коэффициентов $f(1)=1$.

Определение. *Число c называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(c)=0$.*

Понятие корня является центральным понятием в теории многочленов. Исторически теория многочленов и была создана для решения разнообразных вопросов, связанных с решением алгебраических уравнений произвольной степени, т. е. с нахождением корней многочленов. Более того, именно в результате попыток отыскания общей формулы для решения кубических уравнений математиками были открыты комплексные числа.

Упражнения

1. Выполнить действия:

$$(x^3+x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(x^4+x^2+1).$$

2. Найти свободные члены и суммы коэффициентов многочленов:

а) $(x^2+x-1)^{1980}$; б) $(3x^2-4x+2)^{100}$; в) $(x+1)^n$.

3. Доказать тождества:

а) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ \ldots\ +1)$;

б) $x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\ \ldots\ -x+1)$.

4. Один из корней уравнения $x^3-6x^2+ax-6=0$ равен 3. Найти a и решить это уравнение.

5. Найти целые числа a и b, при которых один из корней уравнения $3x^3+ax^2+bx+12=0$ равен $1+\sqrt{3}$.

6. Многочлен $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_n$ имеет корни x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Какие корни имеют многочлены:

а) $a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \ldots\ +(-1)^na_n$;

б) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \ldots\ +a_0\quad (a_n\neq 0)$;

в) $a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ \ldots\ +(-1)^na_0\quad (a_n\neq 0)$;

г) $2^na_0x^n+2^{n-1}a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_n$;

д) $a_nx^n-2a_{n-1}x^{n-1}+\ \ldots\ +(-1)^n2^na_0\ (a_n\neq 0)$?

Равенство многочленов. В каком случае мы считаем два многочлена равными? В соответствии с приведенным выше определением многочлена этот вопрос сводится к вопросу о равенстве выражений вида (1). Но для выражений любого вида мы имеем понятие тождественного равенства, и положим это понятие в основу определения равенства многочленов.

Именно многочлены $f(x)$ и $g(x)$ мы будем считать *равными,* если при любом $c \in \mathbf{R}$ они принимают равные значения:

$$f(c) = g(c).$$

Равенство многочленов $f(x)$ и $g(x)$ записывают в виде $f(x) = g(x)$. Отсюда получаем, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ *различны,* если хотя бы при одном $c \in \mathbf{R}$ они принимают различные значения: существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что $f(c) \neq g(c)$.

Для установления равенства двух многочленов обычно пользуются тождественными преобразованиями. Например,

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

В обоих случаях для доказательства равенства достаточно раскрыть скобки и привести подобные члены, или, как иногда говорят, привести многочлены к стандартному виду (1).

Если после приведения двух многочленов к стандартному виду (1) получатся два выражения с одинаковыми коэффициентами при одинаковых степенях x, то такие многочлены, разумеется, равны. Но верно ли обратное: если два многочлена, представленные в виде (1), равны, можно ли утверждать, что при одинаковых степенях x они имеют одинаковые коэффициенты?

Это утверждение, как оказывается, справедливо, и мы докажем его, опираясь на непрерывность целой алгебраической функции, т. е. функции вида

$$x \to a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

(см. «Алгебра и начала анализа, 9», § 8, п. 41, теорема 1).

Пусть многочлены

$$f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad g(x) = b_0x^n + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

принимают равные значения при любом $x \in \mathbf{R}$ (мы не требуем здесь, чтобы коэффициенты a_0 и b_0 были непременно отличны от 0); тогда их разность

$$h(x) = (a_0 - b_0)x^n + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) = c_0x^n + \ldots + c_{n-1}x + c_n$$

при любом $x \in \mathbf{R}$ обращается в 0. Следовательно,

$$c_n = h(0) = 0,$$

и мы рассмотрим функцию $h_1(x)$, определяемую формулой

$$h_1(x) = c_0x^{n-1} + \ \ldots\ + c_{n-2}x + c_{n-1}.$$

Для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $h_1(x) = h(x)/x$, так что функция $h_1(x)$ обращается в 0 во всех точках $x \neq 0$. Но тогда и ее предел при $x \to 0$ равен 0, и поэтому в силу непрерывности $h_1(x)$

$$c_{n-1} = h_1(0) = \lim_{x \to 0} h_1(x) = 0.$$

Продолжая это рассуждение, получаем последовательно равенства $c_{n-2} = 0$, $c_{n-3} = 0$, ..., $c_0 = 0$. Тем самым мы получили, что

$$a_0 - b_0 = 0,\ a_1 - b_1 = 0,\ \ldots,\ a_n - b_n = 0,$$

и нужное утверждение доказано.

Это утверждение имеет чрезвычайно важное значение для теории многочленов и с действительными коэффициентами, и с комплексными. Надо отметить, что в общей алгебраической теории многочленов, когда коэффициенты берутся необязательно из числового множества, соответствующее утверждение может быть и неверным. Такие многочлены рассматриваются не только в «чистой», но и в прикладной математике, например в алгебраической теории кодирования. К сожалению, мы не располагаем в нашем курсе возможностями привести соответствующие примеры.

Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую задачу:

Доказать, что если многочлен $f(x)$ является четной функцией, то он не содержит одночленов нечетной степени.

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \ldots\ + a_{n-1}x + a_n.$$

Тогда

$$f(-x) = (-1)^n a_0x^n + (-1)^{n-1}a_1x^{n-1} + \ \ldots\ - a_{n-1}x + a_n,$$

и поскольку по условию $f(x) = f(-x)$, то их коэффициенты при одинаковых степенях x равны между собой. Отсюда

$$a_0 = (-1)^n a_0,\ a_1 = (-1)^{n-1}a_1,\ \ldots,\ a_k = (-1)^k a_k,\ \ldots,\ a_{n-1} = -a_{n-1},$$

и, следовательно, $a_k = 0$ при нечетном k, что и требовалось доказать.

Упражнения

7. Доказать, что в выражении $(x^2 - x + 1)^{1980} + (x^2 + x + 1)^{1980}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется нечетных степеней x.

8. Доказать, что многочлен $p(x)$, являющийся нечетной функцией, не содержит одночленов четной степени.

9. Найти суммы коэффициентов многочлена $(x^2 - x + 1)^{100}$: а) при четных степенях x; б) при нечетных степенях x.

2. Деление многочленов. Теория многочленов в определенном отношении похожа на теорию целых чисел, хотя внешне эти две теории не имеют ничего общего. Внутренняя же близость, схожесть этих теорий объясняется тем, что для многочленов, так же как и для целых чисел, можно определить деление и, что еще более важно, деление с остатком.

Делимость многочленов.

Определение. *Многочлен* $f(x)$ *делится на многочлен* $g(x) \neq 0$, *если существует такой многочлен* $q(x)$, *что выполняется равенство*

$$f(x) = g(x)q(x). \tag{3}$$

Например, из равенства

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

следует, что x^3+1 делится на многочлен $x+1$ и на многочлен x^2-x+1.

Заметим, что многочлен $f(x)$ в равенстве (3) определяется однозначно: если бы существовал многочлен $q_1(x)$, удовлетворяющий равенству (3), то мы получили бы, что

$$f(x) = g(x)q(x) = g(x)q_1(x),$$

откуда

$$g(x)[q(x)-q_1(x)] = 0.$$

Но многочлен $g(x)$ по условию ненулевой, и в силу утверждения (2) нулевым является многочлен $q(x)-q_1(x)$, т. е. многочлен $q_1(x)$ совпадает с $q(x)$.

Многочлен $q(x)$ в равенстве (4) называется *частным от деления* $f(x)$ на $g(x)$.

Делимость многочленов обладает теми же свойствами, что и делимость целых чисел, например:

1) если два многочлена делятся на $g(x)$, то их сумма и разность также делятся на $g(x)$;

2) если $f(x)$ делится на $g(x)$, то и любое произведение $f(x)u(x)$ делится на $g(x)$;

3) если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то и $f(x)$ делится на $h(x)$.

Доказательства этих свойств проводятся на основе определения делимости. Они довольно очевидны, и мы их проводить не будем.

Свойства делимости многочленов могут быть применены для изучения делимости в множестве целых чисел. Выясним, например, *для каких целых чисел* n *число* n^3+n^2-5n-2 *является простым.*

Напомним прежде всего, что натуральное число, отличное от 1, называется простым, если оно делится только на 1 и на само себя; целое отрицательное число k называется простым, если число $-k$ простое.

Для ответа на поставленный вопрос заметим, что справедливо равенство

$$x^3+x^2-5x-2=(x-2)(x^2+3x+1), \qquad (4)$$

и поэтому число n^3+n^2-5n-2 делится на $n-2$ и на n^2+3n+1. Следовательно, оно может быть простым только в случае, когда один из этих делителей равен 1 или -1, т. е. выполняется хотя бы одно из равенств

$$n-2=1,\ n-2=-1,\ n^2+3n+1=1,\ n^2+3n+1=-1.$$

Остается проверить следующие значения n: 3, 1, 0, -3, -1 и -2. При этих значениях n рассматриваемое число равно соответственно 19, -5, -2, -5, 3, 4, так что искомое множество чисел есть

$$\{3,\ 1,\ 0,\ -3,\ -1\}.$$

Может возникнуть естественный вопрос: откуда взялось равенство (4)? Как мы догадались, что многочлен x^3+x^2-5x-2 таким образом раскладывается на множители? Оказывается, что для нахождения разложений такого типа необязательно прибегать к искусственным группировкам, это можно сделать с помощью теории, которая будет изложена ниже.

Из этого примера видно, что уже для решения задач, связанных с делимостью целых чисел, полезно уметь выяснять, делится ли данный многочлен на некоторый другой многочлен (раскладывается ли он на множители). Ответ на такой и многие другие вопросы мы находим с помощью деления многочленов с остатком.

Деление многочленов с остатком.

Определение. *Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен, отличный от 0. Многочлен $r(x)$, имеющий степень меньшую, чем степень $g(x)$, или равный 0, называется остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$, если разность $f(x)-r(x)$ делится на $g(x)$.*

Остаток от деления определяется однозначно: если разности

$$f(x)-r(x) \text{ и } f(x)-r_1(x)$$

обе делятся на $g(x)$, то их разность $s(x)=r_1(x)-r(x)$ также делится на $g(x)$. Если бы многочлен $s(x)$ был ненулевым, то он имел бы степень меньшую, чем $g(x)$, и не мог бы тогда делиться на $g(x)$. Следовательно, $s(x)=0$, так что $r_1(x)=r(x)$.

Если $r(x)$ — остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$, то по определению существует такой многочлен $q(x)$, что

$$f(x)-r(x)=g(x)q(x),$$

или

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x).$$

Многочлен $q(x)$ в этом равенстве определяется, как мы видели выше, однозначно и называется *частным от деления $f(x)$ на $g(x)$*.

Заметим, что $f(x)$ делится на $g(x)$ тогда и только тогда, когда остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен 0.

Основополагающий факт теории многочленов состоит в том, что любой многочлен $f(x)$ на любой ненулевой многочлен $g(x)$ можно разделить с остатком, т. е. можно найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$ — частное и остаток, что выполняется равенство

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

причем $r(x)$ либо нулевой многочлен, либо его степень меньше, чем степень $g(x)$.

В самом деле, пусть

$f(x)=a_0x^n+\ \ldots\ +a_n\ (a_0\neq 0)$, $g(x)=b_0x^k+\ \ldots\ +b_k\ (b_0\neq 0)$ —

произвольные многочлены. Если $n<k$, то из равенства

$$f(x)=g(x)\cdot 0+f(x)$$

как раз и получаем, что частное от деления равно 0, а остаток есть сам многочлен $f(x)$.

Если $n\geqslant k$, то, домножив многочлен $g(x)$ на одночлен $\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}$, мы получим многочлен

$$\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}g(x)=a_0x^n+\ \ldots,$$

старший член которого в точности такой же, как и у $f(x)$. Поэтому разность

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_0}{b_0}g(x)x^{n-k}$$

либо имеет степень меньшую, чем $g(x)$, либо равна 0.

Таким образом, мы нашли многочлен $f_1(x)$, степень которого меньше или равна $n-1$ (или нулевой), такой, что

$$f(x)-f_1(x)\ \text{делится на}\ g(x).$$

Аналогично для многочлена $f_1(x)$ можно найти многочлен $f_2(x)$, степень которого меньше или равна $n-2$ (или нулевой), такой, что

$$f_1(x)-f_2(x)\ \text{делится на}\ g(x).$$

Продолжая эти рассуждения, мы на некотором шаге с номером s получим многочлен, степень которого меньше или равна $k-1$ (или нулевой), такой, что

$$f_{s-1}(x)-f_s(x)\ \text{делится на}\ g(x).$$

Но сумма многочленов, делящихся на $g(x)$, также делится на $g(x)$. Поэтому из полученных утверждений следует, что $f(x)-f_s(x)$ делится на $g(x)$, т. е. $f(x)-f_s(x)=g(x)q(x)$, или

$$f(x)=g(x)q(x)+f_s(x).$$

Поскольку многочлен $f_s(x)$ либо нулевой, либо имеет степень меньше $k=\deg g(x)$, то полученное равенство и означает, что он является остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$, а многочлен $q(x)$ — частным от деления.

В практической деятельности для нахождения частного и остатка применяют способ вычисления, называемый «деление углом». Этот способ в точности соответствует только что проведенным рассуждениям. Покажем его на примере.

$$
\begin{array}{l|l|l}
\boxed{f(x)} & 3x^5+2x^2-x+1 & x^3-3x^2+1 \quad \boxed{g(x)} \\
\boxed{\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}g(x)} & \underline{3x^5-9x^4+3x^2} & 3x^2+9x+27 \quad \boxed{q(x)} \\
 & & \parallel \frac{a_0}{b_0}x^{n-k} \\
\boxed{f_1(x)} & 9x^4-x^2-x+1 & \\
 & \underline{9x^4-27x^3+9x} & \\
\boxed{f_2(x)} & 27x^3-x^2-10x+1 & \\
 & \underline{27x^3-81x^2+27} & \\
\boxed{f_3(x)} & 80x^2-10x-26 &
\end{array}
$$

Это правило в общем виде можно сформулировать так:

1) разделить старший член многочлена $f(x)$ на старший член $g(x)$ и записать результат «под длинной стороной угла»;

2) умножить многочлен $g(x)$ на результат действия 1) и записать произведение под многочленом $f(x)$;

3) вычесть из $f(x)$ записанный под ним многочлен;

4) проверить, имеет ли результат действия 3) степень меньшую, чем степень $g(x)$; если да (или результат нулевой), то он и является остатком, а под длинной стороной угла записано частное, если нет, то применить к этому результату действие 1), рассматривая его как многочлен $f(x)$.

Подведем итог нашим рассуждениям.

Теорема о делении с остатком. ***Для любого многочлена $f(x)$ и любого ненулевого многочлена $g(x)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, для которой выполняется равенство***

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

и многочлен $r(x)$ либо нулевой, либо имеет степень, меньшую степени $g(x)$.

Коротко эту теорему можно сформулировать следующим образом: любой многочлен на любой ненулевой многочлен можно однозначно разделить с остатком.

Сделаем одно важное замечание, которым в дальнейшем мы будем часто пользоваться.

Из правила «деления углом» непосредственно видно, что если $f(x)$ и $g(x)$ многочлены с целыми коэффициентами, причем старший коэффициент $g(x)$ равен единице, то и частное и остаток являются многочленами с целыми коэффициентами.

Упражнения

10. Выполнить деление с остатком:

а) x^3+x^2-3x+1 на x^4;
б) $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ на x^2-3x;
в) x^5+x-1 на $3x^5+x^2-2$.

11. Пусть $r(x)$ — остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$. Найти остаток от деления $af(x)$ на $bg(x)$, где a и b — действительные числа.

12. Найти, при каких действительных p и m многочлен x^3+px+1 делится на многочлен x^2+x+m.

13. Найти, при каких действительных a и b многочлен ax^4+bx^3+1 делится на $(x-1)^2$.

3. Теорема Безу и ее следствия. Сейчас мы докажем теорему, играющую важную роль и в самой теории многочленов, и при решении разнообразных задач.

Теорема Безу. Рассмотрим произвольный многочлен $f(x)$ и разделим его с остатком на двучлен $x-a$. Поскольку степень этого двучлена равна 1, то остаток либо равен 0, либо имеет степень 0. И в том, и в другом случае остаток r есть число. Таким образом, многочлен $f(x)$ представляется в виде

$$f(x)=(x-a)q(x)+r.$$

Положив в этом тождестве $x=a$, получим, что $f(a)=r$. Мы доказали тем самым, что *остаток от деления многочлена на двучлен $x-a$ равен значению многочлена при $x=a$*. Это утверждение полезно запомнить. Отметим еще, что совершенно аналогично показывается, что остаток от деления $f(x)$ на $ax+b$ равен $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

В качестве следствия только что доказанного утверждения мы получаем следующую теорему.

Теорема. ***Многочлен $f(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда число a является его корнем.***

Действительно, $f(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда остаток от деления равен 0, но остаток от деления по доказанному выше равен значению $f(a)$, т. е. $f(a)=0$.

Эта теорема и носит название теоремы Безу. Решим с ее помощью несколько задач.

1. *Решить уравнение* $x^3+2x^2+3x-22=0$.

Нетрудно проверить, что многочлен $f(x)=x^3+2x^2+3x-22$ имеет корень 2. Поэтому по теореме Безу $f(x)$ делится на $x-2$, т. е. имеет место равенство

$$f(x)=(x-2)(x^2+4x+11).$$

Остается, следовательно, решить квадратное уравнение $x^2+4x+11=0$.

Это уравнение, очевидно, не имеет действительных корней, так что $x=2$ — единственный действительный корень исходного уравнения.

В этой задаче мы продемонстрировали общий факт: если известен хотя бы один корень алгебраического уравнения степени n, то с помощью теоремы Безу можно, как говорят, понизить степень, т. е. свести задачу к решению уравнения степени $n-1$. Этот прием позволяет решить любое уравнение третьей степени, если, конечно, удастся подобрать какой-нибудь его корень. О том, как подбирать корни алгебраических уравнений, говорится ниже, в п. 4.

2. *Доказать, что число* $2^{35}+1$ *делится на 11.*

Рассмотрим многочлен $f(x)=x^7+1$; поскольку $f(-1)=0$, то по теореме Безу

$$f(x)=(x+1)q(x),$$

в силу замечания на с. 75, $q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Следовательно, $f(2^5)=2^{35}+1$ делится на $2^5+1=33$, т. е. делится на 3 и на 11.

3. *Доказать равенство* $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$. Обозначим левую часть рассматриваемого равенства через a; тогда

$$a^3=(20+14\sqrt{2})+(20-14\sqrt{2})+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot a=$$
$$=6a+40,$$

и, следовательно, число a является корнем многочлена

$$f(x)=x^3-6x-40.$$

Поскольку $f(4)=0$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x-4$, и, выполнив деление, получим равенство

$$f(x)=(x-4)(x^2+4x+10).$$

Трехчлен $x^2+4x+10$ не имеет корней, и поэтому число 4 — единственный корень многочлена $f(x)$. Но это означает, что $a=4$, а это и требовалось доказать.

4. *Доказать, что для любых целых чисел* a, b, c *число*

$$(a-b)(a+b-c)^2c+(b-c)(b+c-a)^2a$$

делится на $a-b+c$.

Рассмотрим данное выражение как многочлен $f(b)$ относительно переменной b, считая a и c фиксированными параметрами, и подсчитаем его значение при $b=a+c$:

$$f(a+c)=-c\cdot 4a^2c+a\cdot 4c^2a=0.$$

По теореме Безу многочлен $f(b)$ делится на $b-a-c$, и поскольку старший коэффициент двучлена $b-a-c$ равен 1, то коэффициенты частного будут целыми числами, это легко следует из метода «деления углом». Поэтому и данное целое число делится на $b-a-c$, что и требовалось доказать.

5. *Найти, при каких k многочлен*

$$x^3+y^3+z^3-kxyz$$

при любых y, $z\in\mathbf{R}$ делится на $x+y+z$.

Обозначим данный многочлен через $f(x)$. Он делится на $x+y+z$ тогда и только тогда, когда число $x=-(y+z)$ является его корнем. Но

$$\begin{aligned}f(-y-z)&=-(y+z)^3+y^3+z^3+k(y+z)yz=\\&=-3y^2z-3yz^2+ky^2z+kyz^2=\\&=(k-3)(y^2z-yz^2).\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что число $k=3$ удовлетворяет условию задачи. Если же $k\neq 3$, то при числах y, z, отличных от 0 и друг от друга, значение $f(-y-z)$ отлично от 0, так что $f(x)$ не делится на $x+y+z$. Следовательно, условию задачи удовлетворяет только $k=3$.

Разделив данный многочлен при $k=3$ на $x+y+z$, получаем интересное тождество

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-3xyz=\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).\end{aligned}$$

6. *Найти остатки от деления многочлена $x^{105}+x+1$ на x^2-1 и на x^2+1.*

Разделив многочлен $f(x)=x^{105}+x+1$ на x^2-1 с остатком, мы получим равенство вида

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+ax+b,$$

где a, b — неизвестные нам числа. Для их нахождения подставим в полученное тождество значения -1 и 1, являющиеся корнями трехчлена x^2-1; тогда получим систему уравнений

$$-a+b=f(-1)=-1,\ a+b=f(1)=3,$$

из которой находим, что $a=2$, $b=1$ и остаток равен $2x+1$.

Рассмотренный только что прием нельзя применить для получения остатка от деления $f(x)$ на (x^2+1), так как трехчлен x^2+1 не имеет корней. С решением этого примера придется подождать: когда мы построим теорию комплексных чисел, трехчлен x^2+1 будет иметь корень, и мы найдем требуемый остаток.

Упражнения

14. Решить уравнение $x^3-3x+2=0$.

15. Доказать, что число $3^{60}+1$ делится на 82.

16. Найти остаток от деления $x^{99}-3x^{98}+x^2+1$ на x^2-4x+3.

17. Остатки от деления многочлена $p(x)$ на $x-2$ и $x-3$ равны соответственно 5 и 7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-2)(x-3)$.

18. Найти, при каких a и b многочлен $x^{10}+ax^2+bx+1$ делится на x^2-1.

19. Доказать, что $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ делится на $(x-y)(y-z)(z-x)$ при целых x, y, z.

20. Доказать, что $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}}=1$.

21. Доказать, что многочлен $f(x^n)$, делящийся на $x-1$, делится и на x^n-1.

Кратность корней и число корней многочлена. Если число a является корнем многочлена $f(x)$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x-a$; может оказаться при этом, что число a является корнем частного, тогда $f(x)$ будет, очевидно, делиться на $(x-a)^2$ и т. д. В подобных случаях число a называют кратным корнем многочлена.

Определение. *Число a называется корнем кратности k для многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.*

Корни кратности 1 называются *простыми* корнями. Говорят иногда и о корнях кратности 0 — это числа, не являющиеся корнями многочлена.

Так, например, для многочлена

$$x^5-2x^4+x^3=x^3(x-1)^2$$

число 1 является двойным корнем, число 0 — тройным, число 3 — корнем нулевой кратности.

Теорема Безу позволяет сделать важное заключение о числе корней произвольного многочлена. Именно: *число корней многочлена степени n не может быть больше n, даже если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.*

Действительно, пусть многочлен $f(x)$ имеет корни

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$$

кратностей $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s$ соответственно. Тогда

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}f_1(x),$$

откуда $0=f(a_2)=(a_2-a_1)^{k_1}f_1(a_2)$, т. е. $f_1(a_2)=0$.

Пусть l_2 — кратность корня a_2 для многочлена $f_1(x)$, т. е.

$$f_1(x)=(x-a_2)^{l_2}f_2(x),$$

где $f_2(x)$ уже не делится на $x-a_2$, или, что то же самое,

$$f_2(a_2)\neq 0.$$

Тогда

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{l_2}f_2(x),$$

и многочлен $f(x)$ делится на $(x-a_2)^{l_2}$, но не делится на $(x-a_2)^{l_2+1}$, так что l_2 — это кратность корня a_2 для многочлена $f(x)$, т. е. $l_2=k_2$.

Тем самым мы получили равенство

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}f_2(x).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, мы придем к разложению

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ \ldots\ (x-a_s)^{k_s}g(x).$$

Если теперь степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ обозначить через n и m, то будет выполняться равенство

$$n=k_1+k_2+\ \ldots\ +k_s+m,$$

из которого и следует нужное неравенство

$$k_1+k_2+\ \ldots\ +k_s\leqslant n.$$

Наши рассуждения показывают также, что многочлен $f(x)$ раскладывается на линейные множители тогда и только тогда, когда $m=0$, т. е.

$$k_1+k_2+\ \ldots\ +k_s=n,$$

т. е. сумма кратностей корней равна его степени. При этом говорят несколько иначе: число корней многочлена с учетом их кратностей равно степени многочлена.

Напомним, что в пункте 1 этого параграфа мы показали, что если два многочлена равны, т. е. их значения совпадают при любом $x\in\mathbb{R}$, то совпадают и их коэффициенты при одинаковых степенях x. Теперь мы имеем возможность значительно усилить это утверждение.

Теорема единственности. ***Если значения двух многочленов, степени которых не выше n, совпадают в $(n+1)$-й точке, то эти многочлены равны.***

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ — различные числа, $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени не выше n, принимающие в этих точках равные значения.

Если разность $h(x)$ этих многочленов не является нулевым многочленом, то ее степень не выше n (в силу (3)), хотя

$$h(a_i)=f(a_i)-g(a_i)=0\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1),$$

т. е. $h(x)$ имеет по крайней мере $n+1$ корень. Это противоречит утверждению о числе корней многочлена. Следовательно, $h(x)$ есть нулевой многочлен, т. е. $f(x)=g(x)$, что и требовалось доказать.

Название *теорема единственности* объясняется тем, что эту теорему можно переформулировать и следующим образом: каж-

дый многочлен степени n однозначно определяется набором своих значений в $(n+1)$-й точке.

Приведем для иллюстрации применения этой теоремы одну задачу.

Доказать, что при любых попарно различных числах a, b, c выполняется тождество

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Обозначим левую часть доказываемого тождества через $f(x)$. Тогда

$$f(a)-1=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}-1=0,$$

и точно так же показывается, что $f(b)-1=f(c)-1=0$.

С другой стороны, степень многочлена $f(x)-1$, как легко видеть, не больше 2, так что он имеет не больше двух корней. Другими словами, многочлен $f(x)-1$ — нулевой, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Упражнения

22. Найти кратность корня $x=1$ для многочлена

$$x^4-x^3-3x^2+5x-2.$$

23. Найти, при каком a уравнение $x^5+2ax+1$ имеет корень $x=1$. Какова кратность этого корня?

24. Доказать, что корень кратности k многочлена $f(x)$ является корнем кратности $k-1$ его производной $f'(x)$.

25. Найти все многочлены, делящиеся на свою производную.

26. При каких действительных a и b многочлен ax^5+bx^4+1 имеет кратные корни?

27. Найти значения a, b и c, при которых $x=-1$ является трехкратным корнем уравнения $x^5+ax^3+bx+c=0$.

28. Доказать, что если все корни многочлена $g(x)$ действительны, просты и являются корнями многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $g(x)$.

29. Решить уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1,$$

где a, b, c, d — попарно различные действительные числа.

4. Многочлены с целыми коэффициентами. Выше мы говорили об одном из важных применений теоремы Безу: если требуется решить уравнение степени n и известен один корень этого

уравнения, то теорема Безу дает возможность свести задачу к решению уравнения степени $n-1$.

Возникает естественный вопрос: а откуда взять этот корень? В случае многочленов с целыми коэффициентами можно отыскать рациональные, в частности целые, корни, если, конечно, они существуют.

Способ отыскания рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

Теорема. ***Если несократимая дробь*** $\frac{p}{q}$ ***является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на*** p, ***а старший коэффициент делится на*** q.

Доказательство. Пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n$$

многочлен с целыми коэффициентами и $\frac{p}{q}$ — его корень; числа p и q предполагаются по условию взаимно-простыми, т. е. не имеющими общих делителей (кроме 1 и -1). Равенство $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, или

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ \dots\ +a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0,$$

перепишем двумя способами:

$$-p(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\ \dots\ +a_{n-1}q^{n-1})=a_nq^n,$$
$$a_0p^n=-(a_1p^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1})q.$$

Из первого равенства следует, что произведение a_nq^n делится на p, и поскольку q^n и p не имеют общих множителей, то на p делится только a_n. Точно так же из второго равенства получается, что a_0 делится на q. Теорема доказана.

В качестве очевидного следствия этой теоремы получаем, что *если старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни многочлена* — целые.

В самом деле, в этом случае знаменатель рационального корня $\frac{p}{q}$ может быть равен только 1, так что корень $\frac{p}{q}$ — целый.

Обратим внимание на то, что утверждение, обратное только что доказанной теореме, безусловно, неверно: если p — делитель свободного члена, а q — делитель старшего коэффициента многочлена $f(x)$, то отсюда вовсе не следует, что $\frac{p}{q}$ — корень $f(x)$. Если бы это было так, то, например, многочлен $x-2$ имел бы четыре корня: 1, -1, 2 и -2.

Решим с помощью этой теоремы несколько задач.

1. *Решить уравнение* $x^3+5x^2-2x-24=0$.

Так как старший коэффициент многочлена $f(x)$, стоящего в левой части уравнения, равен 1, то рациональные корни этого уравнения — целые и по теореме являются делителями числа 24. Поэтому искать целый корень следует среди чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. Мы видим, что последовательное испытание всех этих чисел является довольно неприятным занятием.

К счастью, в данном случае корень отыскивается довольно быстро: убедившись, что $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$, мы обнаруживаем, что $f(2) = 0$. Теперь, разделив $f(x)$ на $x-2$, получаем уравнение

$$(x-2)(x^2+7x+12) = 0,$$

и, следовательно, корнями данного уравнения являются числа 2, -3 и -4.

Отметим, что, как видно из этого примера, практическое применение теоремы о рациональных корнях может оказаться сложным из-за необходимости больших вычислений — проверки большого числа «кандидатов» на роль корней. Эту проверку часто можно значительно сократить с помощью различных соображений. Одна из теорем, упрощающих решение задач такого вида, сформулирована в упражнении 33.

2. *Решить уравнение* $4x^5+4x^4+x^3-2x^2-2x+1=0$.

«Кандидатами» на роль числителя рационального корня являются в данном уравнении только ± 1, а «кандидатами» на роль знаменателя — числа 1, 2 и 4. Заметим, что мы всегда можем считать, что знаменатель дроби положителен. Тогда рациональные корни и уравнения будут находиться среди чисел: ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$.

Проверка показывает, что $f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, и после деления с остатком на $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ мы придем к уравнению

$$2x^3+x^2+x-1=0.$$

И здесь важно не забыть, что для этого уравнения «прежние» корни -1 и $1/2$ тоже могут оказаться корнями; и действительно, это уравнение имеет корень $1/2$, после чего оно сводится к квадратному.

В конце концов, мы получим, что корнями исходного уравнения являются числа 1 и $1/2$. Отметим, что для *многочлена,* стоящего в левой части нашего уравнения, корень $1/2$ имеет кратность 2, но при решении самого *уравнения* это нас в данном случае не интересовало.

3. *Найти рациональные корни многочлена*

$$f(x) = x^{37}-2x^{11}+2x^3-6x^2-97.$$

Так как старший коэффициент многочлена $f(x)$ равен 1, то все его рациональные корни целые и являются делителями свободного члена -97. Но число 97 — простое, так что проверке

подлежат только четыре числа: ± 1 и ± 97. Ясно, что 1 и -1 не являются корнями. С другой стороны, при $x=97$ старший член многочлена $f(x)$ значительно превосходит по модулю сумму остальных членов, так что числа 97 и -97 также не являются корнями $f(x)$. Следовательно, $f(x)$ не имеет рациональных корней.

Разумеется, наше рассуждение было не совсем строгим. Можно доказать более формально, что 97 и -97 не являются корнями. Это можно сделать, например, следующим образом: при любом $x>1$ имеем, очевидно,

$$|2x^{11}-2x^3+6x^2+97| \leqslant 2x^{11}+2x^3+6x^2+97 < \\ <97(x^{11}+x^3+6x^2+1)<97\cdot 4x^{12},$$

так что при $x=\pm 97$ старший член $f(x)$ действительно превосходит по модулю сумму остальных слагаемых.

4. *Решить уравнение* $\sin x+\sin 3x=\frac{3}{2}$.

Сложив синусы в левой части уравнения и воспользовавшись формулой синуса двойного угла, запишем уравнение в виде

$$8\sin x\cos^2 x=3.$$

Отсюда после замены $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ получаем для $t=\sin x$ кубическое уравнение $8t^3-8t+3=0$. С помощью теоремы после соответствующих вычислений получим, что корнем этого уравнения является $t_1=\frac{1}{2}$, после чего мы придем к квадратному уравнению

$$4t^2+2t-3=0.$$

Это уравнение имеет корни $t_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$, и поскольку $t_3<-1$, мы получаем две серии решений:

$$x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).$$

Упражнения

30. Найти рациональные корни многочленов:

а) $3x^3-4x^2+5x-18=0$; б) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24=0$.

31. Доказать, что многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

32. Доказать, что уравнение $x^4-3x^3y=y^4$ не имеет решений в целых числах, отличных от нуля.

33. Доказать, что если дробь $\frac{p}{q}$ несократима и является корнем многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами, то $p(1)$ делится на $p-q$, а $p(-1)$ делится на $p+q$.

34. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $p(1)=1979$, $p(3)=1980$?

35. Доказать, что если многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и значения $f(2)$ и $f(3)$ делятся на 6, то и $f(5)$ делится на 6.

§ 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Построение множества комплексных чисел. В этом пункте мы приведем строгое построение понятия комплексного числа, выясним отношение между комплексными и действительными числами, опишем свойства действий над комплексными числами.

Комплексные числа и действия над ними. Рассмотрим формальные выражения вида $a+bi$, где a, b — любые действительные числа. Такими выражениями будут, например,

$$2+(-3)i,\ 0+0i,\ 1-\sqrt{3}\,i,\ 0+1i.$$

Называя такие выражения формальными, мы тем самым подчеркиваем, что не придаем им никакого смысла, не ставим вопроса, что они означают, не задумываемся над тем, как эти выражения могут быть чем-нибудь практически полезны. Мы воспринимаем их чисто формально: чтобы получить такое выражение, надо взять любые два действительных числа a и b, различных или равных, и с помощью вспомогательных знаков «+» и i составить из них выражение указанного вида.

Мы ничего не говорим также и о смысле вспомогательных знаков «+» и i. Здесь знак «+» вовсе не является знаком сложения, как мы его привыкли воспринимать: знак сложения «+» может стоять только между действительными числами или числовыми выражениями и его не ставят, например, между двумя прямыми, поскольку складывать прямые бессмысленно; такого понятия — сумма прямых — не существует. Точно так же и здесь знак «+» — это не знак сложения, а просто формальный знак «прямой крест» и ничего больше. Знак i здесь также ничего не обозначает.

Формальные выражения, которые мы рассматриваем, являются для нас совершенно новыми объектами, и мы договоримся, прежде всего, о том, каким образом отличать эти выражения друг от друга, в каких случаях считать два выражения равными, а в каких случаях — различными. Дадим следующее определение.

Определение 1. *Выражения* $a+bi$ и $c+di$ *называются равными в том и только в том случае, когда* $a=c$ *и* $b=d$.

Равенство выражений $a+bi$ и $c+di$ естественно записывать в виде $a+bi=c+di$.

Теперь мы научимся производить с рассматриваемыми выражениями алгебраические действия, подобные тем, которые производятся с действительными числами.

Определение 2. *Суммой выражений* $a+bi$ и $c+di$ *называется выражение* $(a+c)+(b+d)i$.

Сумма выражений $a+bi$ и $c+di$ обозначается так:

$$(a+bi)+(c+di).$$

Таким образом,

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i. \tag{1}$$

Определение 3. *Произведением выражений* $a+bi$ и $c+di$ *называется выражение* $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Произведение выражений $a+bi$ и $c+di$ обозначается так:

$$(a+bi)(c+di).$$

Таким образом, по определению,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{2}$$

Обратим внимание на то, что в выражении (1) знак «+» используется сразу в трех смыслах: как знак сложения действительных чисел (первый и третий «+» в правой части), как знак суммы комплексных чисел (второй «+» в левой части) и как формальный знак «прямой крест» (в остальных случаях).

Начиная с этого момента мы будем называть наши формальные выражения *комплексными числами*. В действительности мы могли употребить этот термин с самого начала, но мы предпочли ввести его только после того, как научились производить с рассматриваемыми выражениями действия, подобные основным арифметическим действиям с действительными числами.

Множество комплексных чисел принято обозначать буквой **C**. Таким образом, в множестве **C** у нас определены два действия, или, как обычно говорят в алгебре, две *операции* — сложение и умножение. Эти операции обладают такими же свойствами, как сложение и умножение в множестве действительных чисел, именно: выполняется коммутативный (переместительный) закон для сложения и умножения, ассоциативный (сочетательный) закон также для обеих операций, сложение и умножение связаны дистрибутивным (распределительным) законом. Кроме того, в множестве **C** есть «особые» элементы $0+0i$ и $1+0i$, для которых, как легко проверить, выполняются равенства

$$(x+yi)+(0+0i)=x+yi,\quad (x+yi)(1+0i)=x+yi,$$

т. е. в множестве **C** эти элементы играют такую же роль, как и 0 и 1 в множестве **R**.

Помимо двух основных операций, в множестве **C** вводятся еще две — вычитание и деление. Эти операции являются в определенном смысле производными от операций сложения и умножения, и это хорошо видно из следующих определений.

Определение 4. *Комплексное число* z *называется разностью комплексных чисел* x *и* y, *если* $z+y=x$.

Определение 5. *Комплексное число z называется частным комплексных чисел x и y, если $zy=x$.*

Отметим теперь существенное отличие определений 4 и 5 от определений 2 и 3: если определения 2 и 3 явным образом задают способ вычисления суммы и произведения комплексных чисел, то из определений 4 и 5 не только не видно способа вычислений разности и частного, но неясно даже, всегда ли существуют разность и частное и определяются ли они однозначно.

Мы установим сейчас, что если число y отлично от $0+0i$, то для любого x существует единственное частное чисел x и y. В самом деле, пусть $x=a+bi$, $y=c+di$, и будем искать частное z в виде $z=u+vi$. Тогда должно выполняться равенство

$$(u+vi)(c+di)=a+bi,$$

или

$$(uc-vd)+(ud+vc)i=a+bi.$$

По определению 1 из полученного равенства следует, что

$$uc-vd=a,\quad ud+vc=b.$$

Умножим первое равенство на c, а второе на d и, сложив, получим:

$$u(c^2+d^2)=ac+bd.$$

Аналогично получим:

$$v(c^2+d^2)=bc-ad.$$

Действительное число c^2+d^2 отлично от 0, в противном случае $c=d=0$, а тогда $y=0+0i$, что по предположению неверно. Из полученных равенств находим:

$$u=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad v=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Таким образом, число

$$z=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

является единственным частным чисел $a+bi$ и $c+di$. Частное x и y обозначается x/y. Окончательно имеем:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Запоминать эту громоздкую формулу не надо, поскольку на практике частное находят совершенно иным способом, используя понятие сопряженного числа.

Мы не будем доказывать существование и единственность разности для любых двух комплексных чисел — это делается такими же рассуждениями, как и в случае частного, но значительно проще с технической точки зрения. Разность комплексных чисел x и y обозначается $x-y$.

Таким образом, в множестве **C** у нас определены все четыре арифметические операции. Эти операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции в множестве действительных чисел, и поэтому вся техника преобразований числовых выражений, вся арифметика комплексных чисел, касающаяся, разумеется, именно этих четырех операций, в точности такая же, как и в множестве действительных чисел.

Действительные и комплексные числа. Выше мы дали определения, составляющие основу теории комплексных чисел, и теперь нам предстоит построить эту теорию. Однако сначала постараемся ответить на два вопроса: почему формальные выражения с такими правилами действий над ними называются числами, и уж если они так называются, то какова связь между этими комплексными числами и «обычными» действительными числами?

Первый вопрос, конечно, совершенно не математический, так как, во-первых, в нем идет речь о названии, а это не предмет математических рассуждений, а во-вторых, определения, что такое число, в математике не существует, так что и говорить о том, числа мы получили или не числа, просто бессмысленно.

Второй вопрос более содержателен. До сих пор каждый раз при построении новых чисел всякое «старое» число оказывалось частным случаем «нового»: так, всякое натуральное число — целое, всякое целое число — рациональное, всякое рациональное число — действительное. Хотелось бы, чтобы и каждое действительное число было комплексным, чтобы множество **R** действительных чисел оказалось частью множества **C** комплексных чисел.

Между тем, строго говоря, это не так: «комплексные числа» — это вовсе не числа, а формальные выражения, и не может даже идти речи о том, что действительное число является «комплексным числом». Тем не менее положение можно спасти.

Комплексные числа вида $a+0i$ мы назовем «действительными» и вместо $a+0i$ будем писать просто a. Таким образом, одним и тем же символом a мы обозначим и действительное число a, и «действительное» комплексное число $a+0i$. Поэтому в дальнейшем придется заботиться о том, чтобы всегда можно было различить, в каком смысле употреблен данный символ.

Например, ясно, что в выражении $2<3$ речь идет только о действительных числах, поскольку для комплексных чисел не введено отношение «меньше» (и знак $<$).

Однако такое выражение, как $(2\cdot 3+2)\cdot 4+1$, имеет смысл и для действительных чисел 1, 2, 3, 4, и для соответствующих комплексных чисел. В последнем случае действия, обозначенные знаками «$+$» и «$\cdot$», выполняются по формулам (1) и (2).

Оказывается, что на самом деле безразлично, в каком именно смысле понимать это и все подобные выражения, составленные из символов, действительных чисел с помощью знаков сло-

жения и умножения. Действительно, пусть $a+0i$ и $c+0i$ произвольные «действительные» комплексные числа; вычислим по формулам (1) и (2) их сумму и произведение:

$$(a+0i)+(c+0i)=(a+c)+0i,$$
$$(a+0i)(c+0i)=ac+0i.$$

Мы видим, что суммой двух «действительных» чисел $a+0i$ и $c+0i$ является «действительное» число $a+c$, а их произведением — «действительное» число ac, т. е. «действительные» числа складываются и перемножаются точно так же, как действительные числа без кавычек, так что «действительные» числа отличаются от настоящих действительных чисел только обозначениями. Поэтому эти числа можно, как говорят, отождествить, т. е. комплексное число $a+0i$ считать *равным* действительному числу a.

В результате такого отождествления мы получаем, что множество **R** действительных чисел стало частью множества **C** комплексных чисел, т. е. всякое действительное число является теперь числом комплексным. В дальнейшем при построении теории мы, конечно, так и будем считать.

Выяснив связь между комплексными и действительными числами, мы имеем некоторый ответ и на первый вопрос: почему формальные выражения называются числами? Это название уже не так неестественно, как могло показаться раньше, так как построенное множество содержит как часть множество действительных чисел, и, следовательно, понятие комплексного числа можно рассматривать как обобщение понятия действительного числа и для нового понятия сохранить старое название, придавая тем самым этому названию более широкий смысл.

Такое расширение старого понятия с сохранением названия уже не раз происходило в школьном курсе, например при развитии понятия степени: если впервые степень появляется как произведение равных сомножителей, то общее понятие степени имеет к произведению очень отдаленное отношение. И тем не менее мы всегда сохраняли название «степень», добавляя при необходимости некоторые уточнения, степень с целыми показателями, с рациональным показателем и т. п.

Число i. Для упрощения арифметики комплексных чисел, для облегчения действий с ними проведем еще некоторые рассуждения.

Обозначим комплексное число $0+1i$ через i. Теперь символ i у нас встречается в двух смыслах — как исходный символ, ничего не обозначающий, и как комплексное число $0+1i$. Более того, оказывается, что и всякое комплексное число $a+bi$ теперь можно истолковать двумя способами — как исходное формальное выражение и как сумму комплексного числа $a=a+0i$ и произведения комплексных чисел $b=b+0i$ и $i=0+1i$.

Нетрудно сообразить, что при обоих способах толкования мы получаем один и тот же результат, действительно,

$$(a+0i)+(b+0i)(0+1i)=(a+0i)+[(b\cdot 0-0\cdot 1)+(b\cdot 1-0\cdot 0)i]=$$
$$=(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi.$$

Теперь можно по-новому взглянуть и на формулы (1) и (2). Именно, пользуясь свойствами действий над комплексными числами и рассматривая a, b, c, d, i как отдельные комплексные числа, сложим $a+bi$ и $c+di$:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i.$$

Таким образом, мы пришли именно к тому результату, который указан в формуле (1). Конечно, это ни в коем случае не означает, что тем самым формула (1) доказана: прежде чем установить свойства действий, которыми мы пользовались, следовало дать им определения, что и было сделано формулами (1) и (2).

Прежде чем перейти к формуле (2), вычислим произведение $i^2=ii$:

$$i^2=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

Наконец, учитывая, что $i^2=-1$, перемножим числа $a+bi$ и $c+di$, снова рассматривая a, b, c, d, i как отдельные комплексные числа:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=$$
$$=ac-bd+bci+adi=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Таким образом, мы и здесь приходим к тому, что установлено исходной формулой.

Проделанные рассуждения могут быть подытожены следующим образом: для совершения действия с комплексными числами нет надобности помнить формальные определения, задаваемые формулами (1) и (2); с этими числами можно обращаться как с обычными двучленами, заменяя при возможности выражение i^2 на -1.

Мнимые и чисто мнимые числа. В заключение этого пункта введем еще несколько терминов, часто использующихся в теории комплексных чисел и при решении задач.

Пусть $z=a+bi$ — комплексное число; число a называется *действительной частью* z, число b (действительное!) называется *мнимой частью* z (иногда коэффициентом при мнимой части). Действительная и мнимая части z обозначаются соответственно через $\mathrm{Re}\,z$ и $\mathrm{Im}\,z$. Таким образом, по определению

$$\mathrm{Re}\,(a+bi)=a,\ \mathrm{Im}\,(a+bi)=b.$$

Мы уже знаем, что комплексные числа, у которых мнимая часть равна нулю, являются действительными числами; числа же, у которых действительная часть равна нулю, называются *чисто мнимыми.* Комплексные числа, не являющиеся действи-

тельными, называются *мнимыми*. Отметим интересный факт, что в приведенной терминологии число 0 является одновременно действительным и чисто мнимым, но не является мнимым.

Упражнения

36. Вычислить:

а) $(1+i)(3-2i)$; г) $(1+i)^{1980}$;

ж) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$;

б) $\dfrac{1+i}{1-2i}$;

д) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}$;

з) $\dfrac{(1-i)^9}{(1+i)^{10}}$;

в) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{1-i}{4+2i}$;

е) i^n;

и) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{1980}$.

37. Найти действительные числа x и y, для которых:

а) $(2+i)x+(4-i)y=2+3i$;
б) $(-3+i)x+(1+2i)y=i$.

38. Найти все решения уравнения:

а) $(1+i)z=3-iz$;
б) $z^2=i$;
в) $z^2=3+4i$;
г) $z^2-2iz+1=0$.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексные числа, как и действительные, допускают простую геометрическую интерпретацию, если вместо координатной прямой использовать координатную плоскость. При этом геометрическая интерпретация комплексных чисел в определенном смысле более важна, чем геометрическая интерпретация действительных чисел; с ее помощью можно наглядно толковать не только сами числа, но и действия над ними и на этой основе решать задачи как самой теории комплексных чисел, так и иного содержания, в частности геометрические задачи.

Соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости. Каждому комплексному числу $z=a+bi$ соответствует точка A с координатами (a, b). При этом говорят, что точка A изображает комплексное число z (рис. 1).

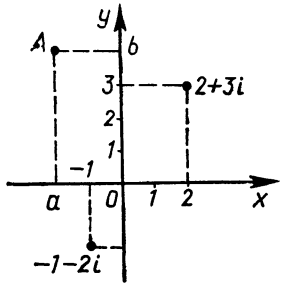

Рис. 1

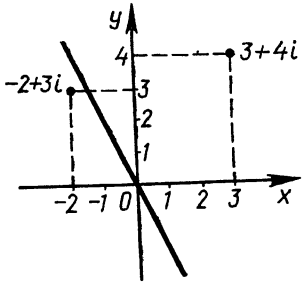

Рис. 2

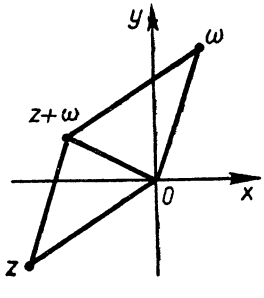

Рис. 3

Это соответствие между множеством $\mathbf{C}$ комплексных чисел и множеством точек плоскости является взаимно однозначным: каждое комплексное число изображается единственной точкой, каждая точка изображает единственное комплексное число. Для упрощения терминологии мы часто будем называть комплексными числами и сами точки плоскости. В таком упрощении нет фактически ничего нового, поскольку и при рассмотрении действительных чисел мы часто не делаем различия между числами и изображающими их точками координатной прямой.

Эту удобную геометрическую терминологию мы будем применять везде, где это упрощает изложение. Так, например, мы будем говорить, что число $-2+3i$ лежит во второй четверти (рис. 2), что число $3+4i$ лежит на окружности радиуса 5 с центром O, что числа вида $x-2xi$ составляют прямую с уравнением $y=-2x$ и т. д.

С помощью геометрического изображения можно наглядно трактовать сложение и вычитание комплексных чисел. Именно если некоторые точки изображают комплексные числа z и w, то сумма $z+w$ изображается вершиной параллелограмма, показанного на рис. 3.

Еще более полезно заметить, что точка $z+w$ получается из точки z параллельным переносом — вектором $\overrightarrow{Ow}$. Так, точка $z-2$ получается из z сдвигом влево на расстояние 2 (рис. 4), точка $z+i$ — сдвигом вверх на расстояние 1, а точка $z+1-3i$ получается из z последовательным выполнением двух сдвигов — сначала на расстояние 1 вправо, а затем на расстояние 3 вниз.

Для геометрического выполнения вычитания заметим, что вычитание сводится к сложению:

$$z-w=z+(-w),$$

и, следовательно, разность $z-w$ также получается по правилу параллелограмма (рис. 5).

Однако для решения задач более существенным является тот факт, что расстояние между точками O и $z-w$ равно расстоянию между точками z и w.

Что касается умножения и деления комплексных чисел, то для их геометрического истолкования столь простых соображений недостаточно, и нам потребуются еще два понятия. Впрочем, эти понятия в теории комплексных чисел играют большую роль и независимо от геометрических вопросов.

Модуль и аргумент комплексного числа.

Определение. *Пусть точка A, отличная от O, изображает комплексное число z. Тогда расстояние $|OA|$ называется модулем числа z.*

Угол (или его величину) между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overrightarrow{OA}$, измеренный против часовой стрелки, называют главным аргументом числа z (рис. 6).

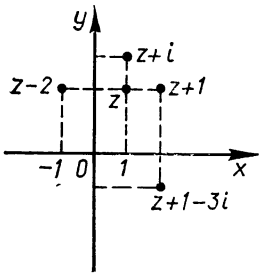

Рис. 4

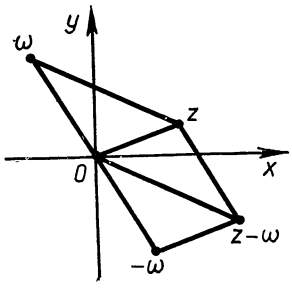

Рис. 5

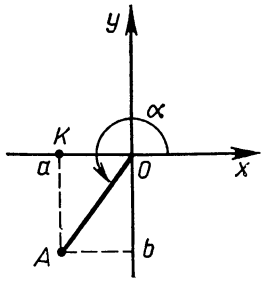

Рис. 6

Модуль числа z обозначается $|z|$, главный аргумент z — $\arg z$. Модуль нуля принимается равным 0; главный аргумент нуля вообще не определяется. Таким образом, $|z|$ — это всегда неотрицательное действительное число, а $\arg z$ — число из промежутка $[0;\ 2\pi[$.

Отметим еще, что всякий угол, отличающийся от главного аргумента z на $2k\pi$, где k — целое число, называют *аргументом* числа z. Например, главный аргумент числа i равен $\pi/2$, а все его аргументы имеют вид $\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Прежде чем перейти к геометрическому истолкованию действий умножения и деления, решим несколько задач, связанных с расположением комплексных чисел на плоскости. При этом исключительно полезным является отмеченный нами выше факт, что расстояние между точками z и w равно расстоянию между 0 и $z-w$, т. е. равно $|z-w|$.

1. *Где расположены комплексные числа z, для которых* $|z|=3$? Ответ на этот вопрос немедленно следует из определения модуля — эти комплексные числа расположены на окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

2. *Где расположены комплексные числа z, для которых*

$$|z-2+i|\geqslant 5?$$

Поскольку

$$|z-2+i|=|z-(2-i)|,$$

то искомые точки z отстоят от точки $2-i$ на расстояние, большее или равное 5. Но это означает, что они лежат вне окружности радиуса 5 с центром в точке с координатами $(2, -1)$ и на этой окружности.

3. *Где расположены комплексные числа z, для которых*

$$|z-1|=|z-i|?$$

Данное равенство означает, что точка находится на одинаковом расстоянии от точек 1 и i; следовательно, она находится на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему эти

точки. Поэтому искомые числа z расположены на биссектрисе первого и третьего координатных углов.

4. *Где расположены комплексные числа z, для которых:*

$$\text{а) } \arg z=\frac{2\pi}{3};\quad \text{б) } \pi<\arg z<\frac{5\pi}{3};\quad \text{в) } \arg(z+i)=\pi?$$

Ответ на вопрос а) следует немедленно из определения главного аргумента: соответствующие точки составляют луч OA, проведенный под углом $\frac{2\pi}{3}$ к положительному направлению оси абсцисс. Точно так же в случае б) искомые точки составляют угол между лучами OB и OC (рис. 7).

Для ответа на вопрос в) заметим, что точка $w=z+i$ лежит на отрицательном луче оси абсцисс, а точка z получается из нее сдвигом вниз на расстояние 1. Следовательно, искомые точки образуют луч AB (рис. 8) без точки A.

Естественно поставить вопрос о том, как найти модуль и аргумент заданного комплексного числа. Что касается модуля, то вопрос решается просто: модуль числа $z=a+bi$ есть, по определению, длина гипотенузы прямоугольного треугольника OAK (рис. 6) с катетами длины $|a|$ и $|b|$ соответственно; поэтому

$$|z|=|OA|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{3}$$

Для нахождения главного аргумента α числа $z=a+bi$ заметим, что по определению косинуса и синуса имеют место равенства (рис. 6)

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{4}$$

из которых и можно найти угол α.

К сожалению, равенства (4) не позволяют написать удобную единую формулу для выражения угла α через a и b. Во вся-

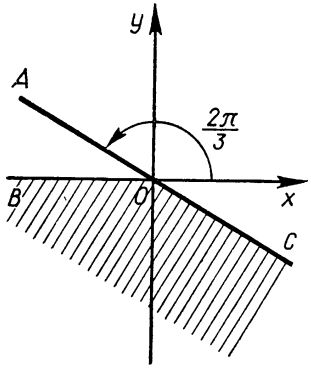

Рис. 7

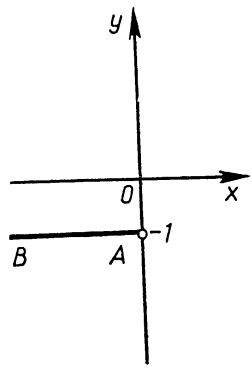

Рис. 8

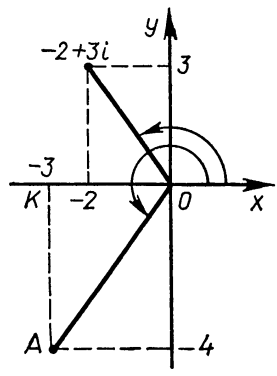

Рис. 9

ком случае оно не обязано совпадать ни с $\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, ни с $\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$: если, например, число z лежит в третьей четверти, то его главный аргумент больше π, тогда как значения арксинуса и арккосинуса не могут быть больше π.

Поэтому главный аргумент конкретного заданного числа находят обычно не по формулам, а с помощью геометрического изображения. Так, для нахождения главного аргумента α числа $-2+3i$ заметим (рис. 9), что он лежит в промежутке от 0 до π и поэтому может быть записан как арккосинус: $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Что касается числа $-3-4i$, то его главный аргумент больше π и, как легко видеть, может быть записан в виде $\pi + \widehat{AOK} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Решим теперь одну из задач, сформулированных в § 1.

Задача. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin\alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos\alpha. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на i и сложив со вторым, получим равенство

$$(\cos x + i\sin x) + (\cos y + i\sin y) = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Положив

$$z = \cos x + i\sin x,\ w = \cos y + i\sin y,\ a = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

перепишем это равенство в виде $z+w=a$. Из формулы (3) получаем, что $|z|=|w|=|a|=1$, т. е. точки z, w и a лежат на единичной окружности. Но тогда параллелограмм $Ozaw$ (рис. 10) — ромб, у которого длина диагонали равна длине стороны, а это означает, что величины углов aOz и aOw равны $\frac{\pi}{3}$.

Другими словами, если x_0 и y_0 — главные аргументы чисел z и w, то $\alpha - x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 - \alpha = \frac{\pi}{3}$. Но тогда произвольные аргументы x и y чисел z и w могут быть записаны в виде

$$x = x_0 + 2k\pi = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ y = y_0 + 2n\pi = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2n\pi\ (k,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Эти формулы и дают решение данной системы.

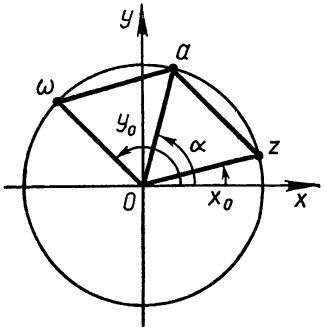

Рис. 10

Упражнения

39. Изобразить на плоскости числа $1+i$, $2-3i$, $-1-2i$, $7-5i$.

40. Где на плоскости расположены точки, изображающие комплексные числа z вида $z=t+(1-t)i$, t — действительное число?

41. Изобразить на плоскости все комплексные числа z, для которых $(1+i)z$ действительно.

42. Концы некоторого отрезка изображают числа z и w. Какое число изображается серединой этого отрезка?

43. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника. Какое комплексное число соответствует центроиду этого треугольника?

44. Точки z_1, z_2, z_3 — три вершины параллелограмма. Найти четвертую вершину.

45. Указать на плоскости множества точек, задаваемых следующими соотношениями:

а) $1<|z-1|<2$;

б) $|z+1-i|>|z+i|$;

в) $|2z-i|=4$;

г) $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{Im} z=1$;

е) $2\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=1$;

ж) $\operatorname{Re}(iz+2-i)=2$;

з) $1<\operatorname{Re} z<2$;

и) $0<\operatorname{Im} z<1$;

к) $\operatorname{Im}(1+i)z=1$;

л) $\arg z=\frac{7\pi}{4}$;

м) $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{2\pi}{3}$;

н) $\frac{\pi}{6}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4}$;

о) $\arg(iz-1)=\frac{\pi}{3}$;

п) $|2z-i|=|2z+1|$;

р) $|(1+i)z-i|=1$.

46. Доказать, что три различные точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ — действительное число.

Тригонометрическая форма комплексного числа. С понятиями модуля и аргумента связан еще один важный способ записи комплексных чисел — так называемая тригонометрическая форма. Если r — модуль комплексного числа $z=a+bi\neq 0$, а α — один из аргументов этого числа, то в силу равенств (2)

$$z=r\cos\alpha+ir\sin\alpha=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Таким образом, всякое комплексное число z, *отличное от* 0, может быть записано в виде

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

где r — модуль, а α — один из аргументов числа z (не обязательно главный).

Этот способ записи комплексного числа и называется его представлением в тригонометрической форме или просто *три-*

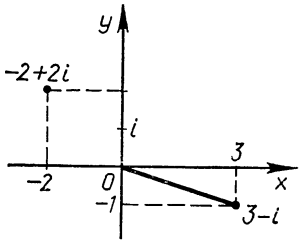

Рис. 11

гонометрической формой. В этой форме может быть представлено любое комплексное число $z \neq 0$; число 0 тригонометрической формы, естественно, не имеет, поскольку для него не определено понятие аргумента.

Исходный способ записи комплексных чисел в виде $a+bi$ принято называть *алгебраической формой.* При решении различных задач, связанных с комплексными числами, часто требуется переходить от одной из рассматриваемых форм записи к другой. «В одном направлении» этот переход осуществляется мгновенно: если число z задано в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то

$$z=r\cos\varphi+i(r\sin\varphi)$$

и есть его представление в алгебраической форме.

Что же касается обратного перехода от алгебраической формы к тригонометрической, то, как мы уже говорили, для нахождения аргумента комплексного числа $z=a+bi$ нет удобной единой формулы и на практике обычно руководствуются геометрическим изображением.

Так, используя рисунок 11, можно записать равенства

$$1=\cos 0+i\sin 0,\ i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi),\ -2+2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$3-i=\sqrt{10}\left(\cos\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right).$$

Эти равенства являются представлением соответствующих чисел в тригонометрической форме. Заметим, что последнее число может быть записано и в двух следующих видах:

$$3-i=\sqrt{10}\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right),$$

$$3-i=\sqrt{10}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)-i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right),$$

но вторая из этих записей не будет тригонометрической формой этого числа.

С помощью тригонометрической формы можно наглядно истолковать умножение и деление комплексных чисел. Пусть комплексные числа z и w заданы в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\ w=s(\cos\beta+i\sin\beta).$$

Найдем их произведение:

$$zw = rs(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= rs[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)] =$$
$$= rs[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)].$$

Отсюда мы видим, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей:

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \tag{5}$$

а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

Ясно, конечно, что сумма главных аргументов не является, вообще говоря, главным аргументом произведения — это будет лишь в том случае, когда сумма главных аргументов сомножителей меньше 2π.

Формула (5) имеет интересное следствие, не связанное вообще с комплексными числами. Именно, если $z = a + bi$, $w = c + di$, то

$$|z|^2 = a^2 + b^2, \quad |w|^2 = c^2 + d^2,$$
$$|zw|^2 = |(a+bi)(c+di)|^2 = |(ac-bd) + (ad+bc)i|^2 =$$
$$= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2,$$

и после возведения обеих частей в квадрат формула (5) примет вид:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2. \tag{6}$$

Это равенство выполняется для любых действительных чисел a, b, c, d.

Если же числа a, b, c, d — целые, то из равенства (6) вытекает такое следствие: *если каждое из двух данных чисел может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел, то их произведение также является суммой квадратов двух целых чисел.*

Ясно, конечно, что это следствие остается в силе, если вместо двух взять любое конечное число сомножителей.

Это следствие позволит нам решить задачу 6 из § 1.

Имеются ли на окружности радиуса $65\sqrt{5}$ *с центром в начале координат точки с целыми координатами?*

Мы должны выяснить, можно ли число $21125 = 65^2 \cdot 5$ записать в виде

$$x^2 + y^2 = 21125,$$

где x, y — целые числа, отличные от 0. Поскольку $21125 = 5^3 \cdot 13^2$, то для ответа на этот вопрос достаточно заметить, что числа 5 и 13 представляются в виде суммы двух квадратов, а тогда в силу следствия в виде суммы двух квадратов представляется и произведение любого числа сомножителей, равных 5 и 13.

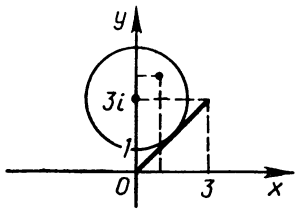

Рис. 12

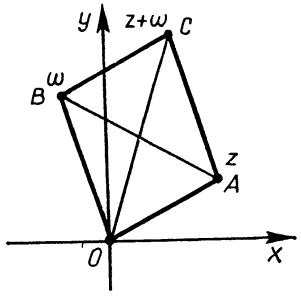

Рис. 13

Итак, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это позволяет следующим образом истолковать операцию умножения: для изображения произведения zw к числу z следует применить поворот на угол $\arg w$ с центром в O, а затем к образу применить гомотетию с центром O и коэффициентом $|w|$.

5. *Где расположены комплексные числа w вида $(1-i)z-2+i$, если $|z-3i|=2$?*

Мы уже знаем, что числа z, удовлетворяющие заданному равенству, лежат на окружности C радиуса 2 с центром в точке $3i$ (рис. 12). Но тогда числа вида $(1-i)z$ получаются из чисел z поворотом на угол $\arg(1-i)=\frac{7\pi}{4}$ и последующей гомотетией $H_O^{\sqrt{2}}$. При этом окружность C перейдет в окружность C_1 радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке $(1-i)3i=3+3i$.

Следовательно, точки $w=(1-i)z-2+i$ лежат на окружности C_2 радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке $1+4i$.

Этот конкретный пример достаточно ясно показывает, что и в общем случае, если точки z составляют некоторую окружность, точки вида $az+b$, где $a\neq 0$, также составляют некоторую окружность.

Можно сказать и иначе: линейная *функция комплексного переменного* $z\to az+b$ при $a\neq 0$ всякую окружность переводит в окружность. Это утверждение в общем виде можно установить и без всяких конкретных вычислений, из чисто геометрических соображений: окружность переходит в окружность и при повороте $R_O^{\arg a}$, и при гомотетии $H_O^{|a|}$, и при параллельном переносе $\overrightarrow{Ob}$. Совершенно аналогичными рассуждениями можно убедиться, что линейная функция $z\to az+b$ при $a\neq 0$ и всякую прямую переводит в прямую.

Для геометрической интерпретации деления комплексных чисел воспользуемся равенством $\frac{z}{w}\cdot w=z$, из которого легко следует, что *модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а разность аргументов является аргументом частного.*

Полученные выше свойства модуля комплексных чисел вместе с одним новым утверждением сведем в единую теорему.

Теорема. ***Для любых комплексных чисел z и w:***

1) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

2) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $(w \neq 0)$,

3) $|z| - |w| \leqslant |z+w| \leqslant |z| + |w|$,

4) $|z-w|$ ***равен расстоянию между точками z и w.***

Из этих утверждений новым является для нас только неравенство 3). Мы не будем, однако, его доказывать, а ограничимся лишь геометрической иллюстрацией: оно означает (рис. 13), что длина диагонали OC параллелограмма $OACB$ меньше суммы длин его сторон OB и OA и больше разности длин этих сторон. Добавим еще, что знак равенства будет только в том случае, когда точки O, z и w лежат на одной прямой, т. е. когда параллелограмм $OACB$, как говорят, «вырожденный».

Теорема Птолемея. Теперь мы можем доказать теорему Птолемея — задачу 7, сформулированную в § 1. Комплексные числа дадут нам возможность свести доказательство этого геометрического утверждения к установлению элементарного тригонометрического тождества.

Теорема Птолемея. ***Сумма произведений длин противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению длин его диагоналей.***

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 14); выберем точку O за начало координат, луч OA примем за положительный луч оси абсцисс.

Вершины B, C, D будем рассматривать теперь как комплексные числа x, y, z, модули которых равны R, а главные аргументы — это α, β, γ соответственно; вершина A — комплексное число R.

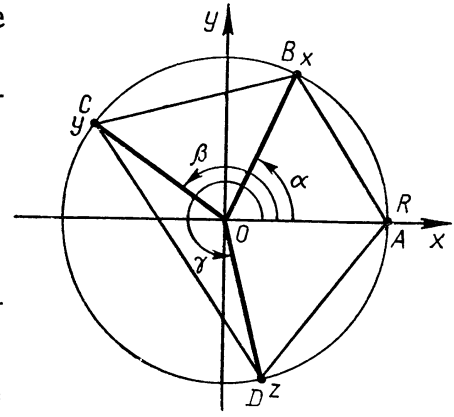

Рис. 14

Нам нужно доказать равенство

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|,$$

которое теперь можно переписать в виде

$$|x-R| \cdot |y-z| + |z-R| \cdot |y-x| = |y-R| \cdot |z-x|. \qquad (7)$$

Но

$$|x-R| = |R(\cos\alpha + i\sin\alpha) - R| = R|(\cos\alpha - 1) + i\sin\alpha| =$$
$$= R\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha} = R\sqrt{2-2\cos\alpha} = 2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

и аналогично

$$|y-R| = 2R\sin\frac{\beta}{2}, \quad |z-R| = 2R\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Далее:

$$|y-z| = \left|z\left(\frac{y}{z}-1\right)\right| = |z|\cdot\left|\frac{\cos\beta+i\sin\beta}{\cos\gamma+i\sin\gamma}-1\right| =$$
$$= R|\cos(\beta-\gamma)+i\sin(\beta-\gamma)-1| = 2R\sin\frac{\gamma-\beta}{2},$$
$$|y-x| = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \quad |z-x| = 2R\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Равенство (7) принимает теперь вид:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

и для его доказательства достаточно воспользоваться формулой синуса разности:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)+$$
$$+\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) =$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Этим и заканчивается доказательство теоремы.

Сопряженные числа. Введем еще одно важное понятие теории комплексных чисел.

Определение. *Сопряженным* к комплексному числу $z=a+bi$ называется число $a-bi$

Число, сопряженное к числу z, обозначается через $\bar{z}$. Совершенно очевидно, что числа z и $\bar{z}$ расположены на плоскости симметрично относительно оси абсцисс, и поэтому

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg\bar{z} = 2\pi - \arg z.$$

Нетрудно проверить, что для любого $z=a+bi$,

$$z+\bar{z} = 2a, \quad z\bar{z} = a^2+b^2,$$

так что сумма и произведение числа со своим сопряженным являются действительными числами. Для мнимых чисел z верно

и обратное утверждение: если числа $z+w$ и zw действительны и $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $w=\bar{z}$. На доказательстве мы останавливаться не будем, но отметим, что ограничение $\operatorname{Im} z \neq 0$ существенно.

Покажем теперь, как сопряженные числа помогают выполнять операцию деления: $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$, т. е. деление сводится к умножению.

Свойства сопряженных чисел описываются следующей теоремой.

Теорема. ***Для любых комплексных чисел z и w***

1) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$; $\overline{z-w} = \bar{z}-\bar{w}$;

2) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$; $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $(w \neq 0)$;

3) $\bar{\bar{z}} = z$;

4) $z\bar{z} = |z|^2$;

5) $\bar{z} = z$ ***тогда и только тогда, когда z — действительное число;***

6) $\bar{z} = -z$ ***тогда и только тогда, когда z — чисто мнимое число.***

Доказательство этой теоремы не представляет никаких трудностей, поэтому мы предлагаем провести его самостоятельно. Заметим только, что при доказательстве во втором из равенств 2) будет полезно, как и выше, воспользоваться равенством $\frac{z}{w} \cdot w = z$.

Можно доказать (методом математической индукции), что правила 1) и 2) справедливы не только для двух, но и для любого числа слагаемых (сомножителей).

Мы воспользуемся этим фактом для выведения из теоремы следствия, играющего большую роль в теории многочленов с действительными коэффициентами.

Следствие. *Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами и z — комплексное число.* Тогда

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

В частности, если a — комплексный корень многочлена $f(x)$, то $\bar{a}$ также корень многочлена $f(x)$.

В самом деле, пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n —$$

многочлен с действительными коэффициентами; тогда

$$\bar{a}_0 = a_0,\ \bar{a}_1 = a_1,\ \ldots,\ \bar{a}_{n-1} = a_{n-1},\ \bar{a}_n = a_n$$

и

$$\overline{f(z)} = \overline{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n} =$$
$$= \overline{a_0z^n} + \overline{a_1z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n} =$$

$$= \bar{a}_0\bar{z}^n + \bar{a}_1\bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1}\bar{z} + \bar{a}_n =$$
$$= a_0\bar{z}^n + a_1\bar{z}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{z} + a_n = f(\bar{z}).$$

Если теперь a — корень $f(x)$, т. е. $f(a)=0$, то $f(\bar{a}) = \overline{f(a)} = \bar{0} = 0$; следовательно, $\bar{a}$ также есть корень $f(x)$.

Упражнения

47. Представить в тригонометрической форме числа:

а) 1; е) $-1+i\sqrt{3}$; л) $3-4i$;
б) -1; ж) $1+i\sqrt{3}$; м) $-3+4i$;
в) i; з) $-1-i\sqrt{3}$; н) $-3-4i$;
г) $-i$; и) $1-i\sqrt{3}$; о) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
д) $1+i$; к) $3+4i$; п) $1+i\operatorname{tg}\alpha$.

48. Упростить выражения:

а) $(1-i\sqrt{3})^6$; в) $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^3$;
б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$; г) $(\sin\beta + i\cos\beta)(1+i\operatorname{tg}\alpha)$.

49. Вычислить:

а) $(1+i)^n$; б) $\left(\frac{1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2$.

50. Найти z, если $\bar{z}+2=2iz$.

51. Найти, при каких натуральных n справедливо равенство
$$(1+i)^n = (1-i)^n.$$

52. Где расположены комплексные числа $w=(1+i)z-i$, если $|z+3i|=1$?

53. Найти хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения $x^2+y^2=32045$.

54. Найти, при каких z_1, z_2 справедливы равенства:

а) $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$;
б) $|z_1+z_2| = |z_1| - |z_2|$;
в) $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$.

55. Доказать тождество $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ и выяснить его геометрический смысл.

56. Доказать, что четырехугольник, сумма квадратов длин сторон которого равна сумме квадратов длин диагоналей,— параллелограмм.

57. Указать на плоскости точки, для которых:

а) $\bar{z} = \frac{1}{z}$; д) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1} = 0$;
б) $z = 1+i-\bar{z}$; е) $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$;
в) $\bar{z} = \frac{1}{-z}$; ж) $\arg\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}$;
г) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 1$; з) $|z-1| = 2|z|$.

3. Степени и корни в множестве комплексных чисел. Степень комплексного числа с произвольным целым показателем определяется точно так же, как и для действительного числа, и мы приводить это определение не будем. При этом формулы преобразования степеней в множестве комплексных чисел остаются теми же. Что же касается определения корня, то мы напомним его с целью явно подчеркнуть логическую возможность существования нескольких корней данной степени из данного комплексного числа.

Именно, *корнем степени* n ($n\in\mathbf{N}$) из комплексного числа z называется *всякое* число w, такое, что $w^n=z$. Как мы увидим ниже, положение с корнями в множестве комплексных чисел совершенно иное, чем в множестве действительных чисел: для любого комплексного числа, отличного от 0, существует ровно n корней степени n.

Формула Муавра. Для возведения в степень и извлечения корней мы воспользуемся тригонометрической формой записи комплексных чисел.

В предыдущем пункте было показано, что для умножения комплексных чисел следует перемножить их модули и сложить аргументы. Ясно, что это правило остается в силе и для большего числа сомножителей. Следовательно, для любого комплексного числа

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

модуль степени z^n ($n\in\mathbf{N}$) будет равен r^n, а аргументом z^n будет $n\alpha$:

$$z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

Полученная формула верна и для отрицательных целых чисел n: в самом деле, если $n=-m$, где $m\in\mathbf{N}$, то, поскольку $\arg 1=0$,

$$z^n=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^{-m}=\frac{1}{[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^m}=$$

$$=\frac{1}{r^m(\cos m\alpha+i\sin m\alpha)}=r^{-m}[\cos(-m\alpha)+i\sin(-m\alpha)]=$$

$$=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

Полученная формула

$$[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\quad(n\in\mathbf{Z})$$

для возведения комплексных чисел в степень и называется *формулой Муавра.* Эта формула имеет широкое применение в теории, и, в частности, она используется при извлечении корней из комплексных чисел. Рассмотрим несколько задач, решаемых с помощью формулы Муавра.

1. *Вычислить* $(1-i\sqrt{3})^{1980}$.

Запишем основание степени в тригонометрической форме:

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Тогда по формуле Муавра

$$(1-i\sqrt{3})^{1980}=2^{1980}\ (\cos(-660\pi)+i\sin(-(660\pi)))=2^{1980}.$$

2. *Вычислить:*

$$\left(\frac{\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ}\right)^{20}.$$

Имеем:

$$\frac{\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ}{\cos(-20^\circ)+i\sin(-20^\circ)}=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ,$$

а тогда

$$(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)^{20}=\cos 800^\circ+i\sin 800^\circ=\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ.$$

3. *Вычислить* $(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$ $(n\in\mathbf{Z})$.

Имеем:

$$1-\cos\alpha-i\sin\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

и, следовательно,

$$(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos n\,\frac{3\pi+\alpha}{2}+i\sin n\,\frac{3\pi+\alpha}{2}\right).$$

Отметим, что последнее действие выполнено нами не в точности по формуле Муавра, поскольку мы не можем утверждать, что $2\sin\frac{\alpha}{2}$ есть модуль числа, стоящего в правой части, ведь $\sin\frac{\alpha}{2}$ может быть и отрицательным. Однако нетрудно заметить, что *формула Муавра остается в силе и для отрицательного числа r*: для доказательства можно использовать свойство степени $(zw)^n=z^nw^n$.

4. *Вычислить суммы:*

а) $S_1=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ \dots\ +\cos n\varphi$,

б) $S_2=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ \dots\ +\sin n\varphi$ $(\varphi\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$.

Мы вычислим эти суммы одновременно. Обозначим через z комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тогда

$$S_1+iS_2=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ \dots\ +$$

$$+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=z+z^2+\ \dots\ +z^n=z\,\frac{z^n-1}{z-1}.$$

В последнем преобразовании мы воспользовались формулой суммы n членов геометрической прогрессии, которая, очевидно, остается в силе и в множестве комплексных чисел. В результате получили, что S_1 и S_2 — это соответственно действительная и мнимая части выражения $z\,\frac{z^n-1}{z-1}$, и для их вычисления достаточно, таким образом, привести это выражение к алгебраической форме. Так же как в примере 3, имеем:

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi-1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{n\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{n\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{n\varphi}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{n-1}{2}\varphi+i\sin\frac{n-1}{2}\varphi\right),$$

откуда

$$z\,\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}\varphi+i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right).$$

Таким образом,

$$S_1=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},\quad S_2=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

5. *Доказать, что* $\cos n\alpha$ *может быть представлен в виде многочлена с целыми коэффициентами от* $\cos\alpha$ ($n\in\mathbf{N}$).

Отметим, прежде всего, что $\cos 2\alpha$ и $\cos 3\alpha$ действительно являются многочленами от $\cos\alpha$:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Рассмотрим комплексное число $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$. С одной стороны, по формуле Муавра

$$z^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,$$

и, следовательно, $\cos n\alpha=\operatorname{Re} z^n$.

С другой стороны:

$$z^n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ldots(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

После раскрытия скобок мы получим в правой части сумму слагаемых вида $a_k=\cos^k\alpha(i\sin\alpha)^{n-k}$. Такое слагаемое будет дей-

ствительным числом только в случае, если $n-k$ есть четное число $2m$, а тогда

$$a_k = \pm \cos^k \alpha (1-\cos^2 \alpha)^m.$$

Легко видеть, что a_k является многочленом с целыми коэффициентами от $\cos\alpha$: поэтому и $\operatorname{Re} z^n$ как сумма таких многочленов также является многочленом с целыми коэффициентами от $\cos\alpha$, что и требовалось доказать.

6. *Доказать, что* $\cos 31^\circ$ — *иррациональное число.*

Предположим противное: $\cos 31^\circ \in \mathbf{Q}$. Тогда, как следует из примера 5, $\cos 310^\circ = \cos(10 \cdot 31^\circ) = f(\cos 31^\circ)$ также является числом рациональным, поскольку многочлен $f(x)$ имеет целые коэффициенты. Мы получили тем самым, что $\cos 50^\circ = \cos 310^\circ \in \mathbf{Q}$. Но рассуждая аналогично, получаем, что $\cos 150^\circ \in \mathbf{Q}$, что, очевидно, неверно. Полученное противоречие и показывает, что $\cos 31^\circ$ — число иррациональное.

Упражнения

58. Вычислить:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1980}$;

б) $(\sqrt{3}+i)^{20}$;

в) $(\operatorname{tg} 17^\circ + i)^{1980}$;

г) $(1+i\operatorname{tg} 1^\circ)^{20}$.

59. Упростить выражения:

а) $(\operatorname{tg}\alpha + i)^n$;

б) $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$;

в) $(\sin\alpha + i\cos\alpha + 1)^n$.

60. Найти $z^n + \frac{1}{z^n}$, если $z + \frac{1}{z} = 1$.

61. Доказать, что $\sin n\alpha$ при нечетном n может быть представлен в виде многочлена с целыми коэффициентами от $\sin\alpha$.

62. Доказать, что числа $\cos 1^\circ$ и $\sin 1^\circ$ иррациональны.

63. Вычислить суммы:

а) $\sin x + a\sin 2x + a^2 \sin 3x + \ldots + a^{n-1}\sin nx$;

б) $\cos x + a\cos 2x + a^2 \cos 3x + \ldots + a^{n-1}\cos nx$;

в) $C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin nx$.

64. Выразить $\operatorname{tg} 5\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

65. Изобразить на плоскости точки z, для которых:
а) $\operatorname{Re} z^6 > \operatorname{Im} z^6$; б) $|\operatorname{Im} z^2| \leqslant 2$.

Извлечение корней. Пусть z — заданное комплексное число, отличное от 0, и w — некоторый корень степени n из z, т. е. по определению корня выполняется равенство

$$w^n = z. \tag{8}$$

Положив

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad w = s(\cos\beta + i\sin\beta),$$

по формуле Муавра перепишем равенство (8) в виде

$$s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Тем самым число z двумя способами представлено в тригонометрической форме; но в двух таких представлениях модуль числа z, естественно, один и тот же, а аргументы могут отличаться на $2k\pi$, где $k\in\mathbf{Z}$. Поэтому

$$s^n = r,\ n\beta - \alpha = 2k\pi\ (k\in\mathbf{Z}),$$

откуда

$$s = \sqrt[n]{r},\ \beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}\ (k\in\mathbf{Z}).$$

Таким образом, всякий корень степени n из числа z имеет вид:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbf{Z}). \qquad (9)$$

Из формулы Муавра следует и обратное утверждение, что всякое число вида (9) является корнем степени n из числа z, и, следовательно, формула (9) описывает все множество корней из z.

Не может, однако, не насторожить то обстоятельство, что алгебраическое уравнение (8) степени n относительно w, имеет... бесконечное множество корней. Но дело в том, что множество чисел (9) лишь на первый взгляд кажется бесконечным, на самом деле в нем всего n различных элементов.

Действительно, рассмотрим числа

$$w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1}. \qquad (10)$$

Все эти числа различны: если, например $k>l$ и оба этих числа лежат в пределах от 0 до $n-1$, то разность аргументов β_k и β_l чисел w_k и w_l, равная

$$\beta_k - \beta_l = \frac{\alpha+2k\pi}{n} - \frac{\alpha+2l\pi}{n} = 2\pi\,\frac{k-l}{n},$$

лежит в интервале от 0 до 2π. Следовательно, β_k и β_l отличаются не на число вида $2n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$, так что $w_k \neq w_l$.

Если же w_k — любое из чисел (9), то, разделив число k с остатком на n, мы получим $k = nq + p$, а тогда

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi nq+2\pi p}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi nq+2\pi p}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi p}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi p}{n}\right) = w_p.$$

Но остаток p по определению остатка удовлетворяет неравенствам $0\leqslant p<n$, и поэтому число w_p входит в множество (10). Таким образом, каждое число w_k из множества (9) в действи-

тельности принадлежит множеству (10), т. е. формулы (9) и (10) задают одно и то же множество комплексных чисел — корней степени n из числа z.

В противоположность действительным числам, где мы можем естественным образом ввести понятие арифметического корня, т. е. в каком-то смысле выделить положительный корень из данного положительного числа, в множестве комплексных чисел все корни степени n «равноправны» и специального обозначения для какого-то «особого» корня не вводится.

Символ $\sqrt[n]{z}$ часто употребляется для обозначения всего множества корней степени n из числа z, и мы можем подвести итог нашим последним рассуждениям: если $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, то

$$\sqrt[n]{z}=\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)0\leqslant k<n\right\}. \qquad (11)$$

Естественно считать, что $\sqrt[n]{0}=0$.

Вычислим для примера все кубические корни из $-i$. Поскольку

$$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2},$$

то $\sqrt[3]{-i}$ состоит из чисел

$$w_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)=$$
$$=\cos\frac{4k+3}{6}\pi+i\sin\frac{4k+3}{6}\pi\quad(0\leqslant k\leqslant 2).$$

Этот результат можно считать ответом, но в данном случае эти числа лучше записать в алгебраической форме:

$$w_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$
$$w_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},$$
$$w_2=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}.$$

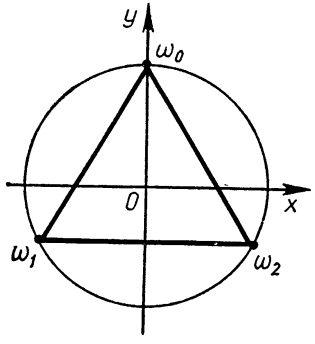

Рис. 15

Отметим, что точки плоскости w_0, w_1, w_2 (рис. 15) являются вершинами правильного треугольника. Это не случайно — для любого $z\neq 0$ и любого $n>2$ корни степени n из числа z являются вершинами правильного n-угольника с центром O: это следует из то-

го, что модули всех корней равны $\sqrt[n]{|z|}$, а углы между направлениями на «соседние» корни w_k и w_{k+1} равны $\frac{2\pi}{n}$.

Корни из единицы. Особый интерес представляет случай, когда $z=1$. Корни степени n из 1 принято обозначать ε_k, т. е.

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(0\leqslant k<n).$$

Прежде всего надо отметить, что с помощью корней из 1 можно несколько по-иному описать корни из любого числа z: из формулы (11)

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=w_0\varepsilon_k.$$

Другими словами, для получения всех корней из z надо взять один корень — «с самым простым аргументом» $\frac{\alpha}{n}$ — и умножить его на все корни из 1.

Укажем следующие свойства корней степени n из 1.

1) Всякий корень степени n из 1 является степенью первого корня; более точно:

$$\varepsilon_k=\varepsilon_1{}^k.$$

Это равенство немедленно следует из формулы Муавра:

$$\varepsilon_1{}^k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

2) Корни ε_k и ε_{n-k} взаимно сопряжены:

$$\bar{\varepsilon}_k=\varepsilon_{n-k}.$$

Действительно,

$$\varepsilon_{n-k}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=$$
$$=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)=$$
$$=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}=\bar{\varepsilon}_k.$$

3) Сумма всех корней степени n из 1 равна 0.

В силу утверждения 1) имеем:

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ \dots\ +\varepsilon_{n-1}=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1{}^2+\ \dots\ +\varepsilon_1{}^{n-1}=$$
$$=\frac{\varepsilon_1{}^n-1}{\varepsilon_1-1}=0,$$

поскольку $\varepsilon_1{}^n=1$.

Мы можем теперь решить сразу две из сформулированных в § 1 задач — задачи 8 и 11.

Указать на плоскости множество точек, для которых сумма квадратов расстояний до вершин заданного правильного многоугольника равна d.

Эту геометрическую задачу мы решим, даже не прибегая к чертежу. Выберем центр O данного n-угольника за начало координат; положительный луч оси абсцисс проведем через некоторую вершину A_0 многоугольника. Тогда вершинам многоугольника соответствуют комплексные числа

$$w_0=R,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1},$$

где R — радиус окружности, описанной около многоугольника.

Возьмем произвольную точку M плоскости, и пусть z — соответствующее ей комплексное число; точка M принадлежит искомому множеству — обозначим его через X — тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$|z-w_0|^2+|z-w_1|^2+\ \ldots\ +|z-w_{n-1}|^2=d. \qquad (12)$$

Преобразуем каждое слагаемое суммы, стоящей в левой части:

$$|z-w_i|^2=(z-w_i)\,\overline{(z-w_i)}=(z-w_i)\,(\bar z-\bar w_i)=$$
$$=z\bar z+w_i\bar w_i-z\bar w_i-\bar z w_i=|z|^2+R^2-z\bar w_i-\bar z w_i.$$

Это позволяет переписать равенство (12) в виде

$$d=n|z|^2+nR^2-z(\bar w_0+\ \ldots\ +\bar w_{n-1})-\bar z(w_0+\ \ldots\ +w_{n-1}).$$

Однако числа $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_{n-1}$, расположенные в вершинах правильного n-угольника с центром O, являются корнями степени n из числа R, т. е. $w_k=\sqrt[n]{R}\varepsilon_k$; поэтому по свойству 3) корней из 1

$$w_0+w_1+\ \ldots\ +w_{n-1}=\sqrt[n]{R}(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ \ldots\ +\varepsilon_{n-1})=0,$$

а тогда и

$$\bar w_0+\bar w_1+\ \ldots\ +\bar w_{n-1}=0.$$

Таким образом, мы получили, что $d=n|z|^2+nR^2$, или

$$|z|^2=\frac{d}{n}-R^2.$$

Отсюда ясно, что при $d>nR^2$ множество X есть окружность радиуса $\sqrt{\frac{d}{n}-R^2}$ с центром O, при $d=nR^2$ — точка O, при $d<nR^2$ — пустое множество.

Разложить на линейные и квадратичные множители многочлен x^n-1.

Многочлен x^n-1 имеет n корней ε_k. Выше, при рассмотрении многочленов с действительными коэффициентами, мы видели, что такой многочлен раскладывается в произведение n линейных множителей — это следует из теоремы Безу. Наши рассуждения нигде не опирались на то, что коэффициенты многочленов действительны, и все установленные выше свойства

многочленов справедливы фактически и для многочленов с комплексными коэффициентами. Поэтому в данном случае мы имеем:

$$x^n-1=(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1}).$$

Это разложение, однако, нас пока не устраивает, поскольку в условии задачи 11 подразумевается, естественно, что коэффициенты сомножителей должны быть действительными — ведь в то время вы вообще ничего не знали о комплексных числах.

Вспомним теперь свойство 2) корней из 1: $\overline{\varepsilon_k}=\varepsilon_{n-k}$ — и рассмотрим отдельно два случая: n нечетное и n четное. Если n нечетное, то двучлены $x-\varepsilon_1$, $x-\varepsilon_2$, ..., $x-\varepsilon_{n-1}$ можно перемножить попарно, объединяя в пары двучлены, «равноудаленные от концов»:

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{n-k})=(x-\varepsilon_k)(x-\overline{\varepsilon_k})=x^2-(\varepsilon_k+\overline{\varepsilon_k})x+1=$$
$$=x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\quad\left(k=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right).$$

После этого будем иметь:

$$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right)\ldots\left(x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1\right).$$

Аналогично рассматривается случай четного n; он предоставляется для самостоятельного рассмотрения.

Упражнения

66. Вычислить корни и изобразить их геометрически:

а) $\sqrt[3]{1}$; г) $\sqrt[3]{-i}$; ж) $\sqrt[n]{-i}$;

б) $\sqrt[3]{-1}$; д) $\sqrt[3]{1+i}$; з) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt[3]{i}$; е) $\sqrt[6]{i}$; и) $\sqrt[5]{3+4i}$.

67. Если натуральное k — делитель натурального n, то всякий корень степени k из единицы является также корнем степени n из единицы. Доказать.

68. Если всякий корень степени k из единицы является корнем степени n из единицы, то k — делитель n. Доказать.

69. Если α — корень степени n из единицы — является также корнем степени m из единицы, то $\alpha^d=1$, где d — наибольший общий делитель чисел m и n. Доказать.

70. Если $\alpha^n=1$ и $\alpha^m=1$, то $\alpha^M=1$, где M — наименьшее общее кратное чисел n и m. Доказать.

71. Корень α степени n из единицы называется первообразным, если $\alpha^n\neq 1$ ни при каком $1\leqslant k<n$.

Доказать, что всякий корень степени n из единицы есть степень первообразного корня α.

72. Найти все первообразные корни из единицы степени: а) 4; б) 8; в) 6; г) 12; д) 24.

73. Доказать, что число первообразных корней степени n из единицы равно количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

74. Решить уравнения:

а) $(x+i)^4+(x-i)^4=0$;

б) $z^4=\bar{z}$;

в) $z^3=-\bar{z}$;

г) $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

75. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} z^3+\bar{w}^7=0, \\ z^5\cdot w^{11}=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} z^3+w^5=0, \\ z^2\cdot\bar{w}^4=1. \end{cases}$

76. Найти сумму k-х степеней всех корней степени n из единицы.

77. Разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $x^{2k}-1$; б) $x^{2k}+1$; в) $x^{2k+1}+1$.

78. Дан правильный треугольник ABC и точка D на дуге BC описанной около него окружности. Доказать, что $|BD|+|CD|=|AD|$.

4. Показательная, логарифмическая и тригонометрические функции комплексного переменного. Формула Эйлера. Мы уже говорили в § 1 о том, что в множестве комплексных чисел тригонометрические функции — это «почти то же самое», что показательная функция. Это утверждение пока, конечно, совершенно не обосновано даже на интуитивном уровне, поскольку мы еще вообще не представляем, хотя бы приблизительно, определения и свойства соответствующих функций комплексного переменного. Однако теперь у нас уже все готово для нужных определений.

Показательная функция. В основе определений всех рассматриваемых ниже функций комплексного переменного лежит правило перемножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Именно если выражение $\cos x+i\sin x$ обозначить через $f(x)$, то правило перемножения примет вид:

$$f(x)f(y)=f(x+y), \tag{13}$$

и в нем немедленно узнается основное свойство показательной функции, определенной, разумеется, на множестве действительных чисел [1].

[1] Можно доказать, что если функция $f(x)$ действительного переменного обладает свойством (13) и, например, непрерывна, то она необходимо является показательной. Поэтому равенство (13) является фактически характеристическим свойством показательной функции. Именно это соображение и ведет нас к последующим определениям в множестве комплексных чисел.

Положим, по определению

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad (x\in\mathbf{R}). \tag{14}$$

Мы не будем пока говорить о том, насколько естественно это определение (вряд ли оно хоть кому-нибудь покажется естественным даже после сделанного выше примечания). В дальнейшем мы еще к нему вернемся, а пока воспользуемся правом, которое имеет математик при построении любой теории: определение не обсуждают — его принимают.

Приведем для примера несколько верных по определению (14) равенств:

$$e^0=1,\ e^i=\cos 1+i\sin 1,\ e^{2\pi i}=1,\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i.$$

Определение (14) дает нам возможность возвести число e в степень с чисто мнимым показателем. Как же «продолжить» это определение на произвольные комплексные числа? Естественно исходить все из того же основного свойства показательной функции (13), которое мы, конечно, желаем сохранить и для показательной функции комплексного переменного. Тогда должно выполняться равенство $e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$, и именно такое определение — с учетом формулы (14) — мы примем:

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{15}$$

Эта формула является определением степени числа e с любым комплексным показателем $z=x+iy$.

Тем самым на множестве комплексных чисел $\mathbf{C}$ мы определили показательную функцию $f(z)=e^z$; при этом если z — действительное, т. е. $z=x+0i$, то $e^z=e^x$, так что наше новое определение степени числа e в «старом» множестве $\mathbf{R}$ имеет «старый» смысл. Это дает основание считать новое определение степени числа e обобщением старого понятия степени числа e с произвольным действительным показателем.

Более того, мы имеем «моральное право» называть полученную функцию показательной и не «в силу обозначения» e^z, а потому, что она обладает свойством (13) — основным свойством показательной функции; в самом деле, если $z=x+iy$, $w=u+iv$, то по определению (15)

$$e^z\cdot e^w=e^x(\cos y+i\sin y)\cdot e^u(\cos v+i\sin v)=$$
$$=e^{x+u}(\cos(y+v)+i\sin(y+v))=e^{z+w}.$$

Отметим, что показательная функция e^z комплексного переменного обладает свойством, делающим ее крайне непохожей на показательную функцию действительного переменного: она периодична! В самом деле, для любого $z\in\mathbf{C}$

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z,$$

так что число $2\pi i$ является ее периодом. Нетрудно показать, что все периоды показательной функции исчерпываются числами вида $2k\pi i$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Функция $f(z)=e^z$ часто называется также экспонентой.

Тригонометрические функции. Формула Эйлера. Данные выше определения делают уже не столь невероятной идею о сходстве показательной и тригонометрических функций комплексного переменного. Собственно говоря, формула (15) уже показывает соответствующую связь: она выражает значения показательной функции комплексного переменного через значения синуса и косинуса действительного переменного. Сейчас мы проделаем обратное — дадим определения синуса и косинуса комплексного переменного с помощью показательной функции.

Для «придумывания» этих определений будем исходить из той же формулы (15). При $x=0$ из нее получаем:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y,$$

и, следовательно,

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\ \sin y=\frac{e^{iy}-e^{iy}}{2i}.$$

Эти равенства получены нами только для $y\in\mathbf{R}$ — только при таких y верна формула (15) (пока!). Но мы воспользуемся ими, чтобы дать соответствующие общие определения.

Именно для любого комплексного числа z положим:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \qquad (16)$$

Эти формулы определяют синус и косинус любого комплексного числа.

«Новые» синус и косинус, определенные на множестве $\mathbf{C}$, при любом действительном z совпадают со «старыми» синусом и косинусом. В самом деле, если $z=x+0i$, то

$$\cos z=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{(\cos x+i\sin x)+(\cos x-i\sin x)}{2}=\cos x,$$

$$\sin z=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x-i\sin x)}{2i}=\sin x.$$

Поэтому синус и косинус комплексного переменного являются продолжением соответствующих функций действительного переменного на множество комплексных чисел.

Оказывается, что для синуса и косинуса комплексного переменного справедливы все формулы «обычной» тригонометрии. Эти формулы проверяются без всякого труда, и мы проверим только три из них: соотношение между синусом и косинусом одного аргумента, формулу косинуса суммы и одну из формул приведения.

Пусть $z=x+iy$ — произвольное комплексное число; имеем:

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4}-\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{4}=1.$$

Пусть теперь $z=x+iy$, $w=u+iv$; тогда

$$\cos z\cdot\cos w-\sin z\cdot\sin w=$$

$$=\frac{(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw})}{4}-\frac{(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})}{4}=$$

$$=\frac{e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}+e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}-e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}}{4}=$$

$$=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}=\cos(z+w).$$

Наконец, поскольку $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{-\frac{i\pi}{2}}=-i$, то

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}{2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-iz}-e^{-\frac{i\pi}{2}}\cdot e^{iz}}{2}=$$

$$=i\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z.$$

Синус и косинус комплексного переменного — функции периодические:

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z.$$

Точно так же проверяется периодичность синуса. Таким образом, «естественная» периодичность синуса и косинуса получена нами как следствие удивительного факта периодичности показательной функции.

Однако тригонометрические функции комплексного переменного, так же как и показательная, таят в себе один сюрприз по сравнению с соответствующими функциями действительного переменного. Если и синус и косинус действительного переменного — функции, ограниченные сверху значением 1, то уже $\cos i=\frac{e^{-1}+e}{2}$ больше 1. Более того, комплексные синус и косинус могут принимать любые комплексные значения — это утверждение, как мы увидим, следует из того, что всякое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами имеет корни, а показательная функция принимает в качестве значения все комплексные числа, отличные от 0.

Связь между экспонентой, синусом и косинусом может быть записана в виде одного равенства:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{17}$$

Это равенство справедливо для любого комплексного числа z и получается непосредственно из формул (16). Отметим, что мы снова пришли к формуле (14), послужившей основой для всех последующих определений, но справедливой теперь для всех комплексных чисел z, а не только для действительных чисел.

Формула (17) — это и есть знаменитая формула Эйлера. Справедливость этого эпитета оправдана даже тем небольшим фрагментом теории комплексных чисел, который мы развили здесь, все же не может не удивлять столь простая связь между такими внешне разнородными понятиями, как степень и синус, определение которого основано на чисто геометрических соображениях. Ниже, впрочем, мы сделаем еще несколько замечаний, проливающих свет на то, как можно «догадаться» до формулы Эйлера из совершенно других соображений.

Логарифмическая функция. Как известно, в множестве действительных чисел логарифмическая функция определяется как функция, обратная к показательной. При этом само существование логарифмической функции основывается на том, что показательная функция действительного переменного *обратима*, т. е. каждое значение принимает ровно один раз.

В случае же комплексного переменного положение совершенно иное: показательная функция периодична и каждое свое значение принимает бесконечное число раз. Как же ввести логарифмы комплексных чисел? Идея определения, впрочем, остается той же, что и в множестве действительных чисел.

Рассмотрим уравнение

$$e^w=z, \tag{18}$$

где z — произвольное, но фиксированное комплексное число, отличное от 0; мы представим z в тригонометрической форме, а неизвестное w будем искать в алгебраической форме:

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\quad w=x+iy.$$

Тогда $e^w=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, и, следовательно, число z двумя способами представлено в тригонометрической форме:

$$e^x(\cos y+i\sin y)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Поэтому $e^x=r$, а аргументы y и α отличаются на $2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), откуда $x=\ln r$ (обычный «действительный» логарифм), $y=\alpha+2k\pi$.

Мы получили, таким образом, что решения уравнения (18) составляют множество

$$\{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\,|\,k\in\mathbf{Z}\}. \tag{19}$$

Это множество бесконечно, и каждый из его элементов можно было бы назвать логарифмом (натуральным) числа z.

Подобная ситуация встречается и в школьном курсе при попытке определить функцию, обратную к синусу: уравнение $\sin x=a$ при $|a|\leqslant 1$ имеет бесконечно много решений, и мы назвали арксинусом числа a то из них, которое лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично можно было бы поступить и в нашем случае: назвать логарифмом числа z то из чисел (19), мнимая часть которого совпадает, например, с главным аргументом числа z.

В теории функций комплексного переменного, однако, поступают обычно иначе: все числа из множества (19), т. е.

$$w_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\ (k\in\mathbf{Z}),$$

называют логарифмами числа z, а отношение, задающееся множеством пар вида (z, w_k), называют многозначной функцией *логарифм*.

Эту многозначную функцию обозначают через Ln. В соответствии со школьным определением функции отношение Ln не является функцией, поскольку оно всегда содержит пары с одинаковыми первыми, но различными вторыми компонентами. Символом $\operatorname{Ln} z$ часто обозначают при этом множество всех логарифмов конкретного числа z.

Так, из равенств

$$1=\cos 0+i\sin 0,\ -1=\cos\pi+i\sin\pi,$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

получаем, что

$$\operatorname{Ln} 1=\{2k\pi i\,|\,k\in Z\},\ \operatorname{Ln}(-1)=\{(2k+1)\pi i\,|\,k\in\mathbf{Z}\},$$

$$\operatorname{Ln}(1-i)=\left\{\frac{1}{2}\ln 2+\left(2k+\frac{7}{4}\right)\pi i\,|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Отметим, что в соответствии с нашими рассуждениями всякое число, отличное от 0, имеет бесконечно много логарифмов; в то же время уравнение $e^z=0$ решений не имеет, поскольку

$$|e^{x+iy}|=|e^x|=e^x\neq 0.$$

Другими словами, *множество значений показательной функции e^z есть множество всех комплексных чисел, отличных от* 0.

Мы можем теперь решать в множестве комплексных чисел тригонометрические уравнения.

Рассмотрим сначала простейшее уравнение.

1. *Решить уравнение* $\sin x=0$.

В соответствии с определением (15) данное уравнение мож-

но переписать в виде $e^{iz}-e^{-iz}=0$, или $e^{iz}=e^{-iz}$, т. е. $e^{2iz}=1$. Это означает, что $iz\in\operatorname{Ln}1$, т. е.

$$2iz=2k\pi i \quad (k\in\mathbf{Z}).$$

Отсюда легко находим $z=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$.

Таким образом, комплексный синус обращается в 0 в тех же точках, что и действительный.

2. *Решить уравнение* $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Как и выше, перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\frac{1}{2},$$
$$e^{iz}+i-e^{-iz}=0,$$
$$e^{2iz}+ie^{iz}-1=0,$$

так что $w=e^{iz}$ является корнем квадратного уравнения $x^2+ix-1=0$. Дискриминант этого уравнения равен $i^2+4=3$, так что его корни

$$x_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Остается теперь решить два уравнения

$$e^{iz}=\frac{\sqrt{3}-i}{2},\quad e^{iz}=\frac{-\sqrt{3}-i}{2},$$

или

$$e^{iz}=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6},\quad e^{iz}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}.$$

Снова имеем: $iz\in\operatorname{Ln}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, т. е. $iz=\left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)i$, откуда

$$z=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

Аналогично, второе уравнение имеет решение $z=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, и мы нашли все комплексные решения исходного уравнения.

Заметим, что и в этом случае мы получили те же решения, что и в множестве действительных чисел. Так будет и для любого уравнения вида $\sin x=a$, где $a\in\mathbf{R}$ и $|a|\leqslant 1$.

3. *Решить уравнение* $\sin x=2$.

Рассуждая точно так же, как в предыдущем примере, мы получим, что число $w=e^{iz}$ будет в данном случае корнем квадратного уравнения $x^2-4ix-1=0$, для которого $D/4=4i^2+1=-3$, так что корни равны $x_{1,2}=2i\pm i\sqrt{3}$, и нам следует теперь решить два уравнения

$$e^{iz}=(2+\sqrt{3})i,\quad e^{iz}=(2-\sqrt{3})i.$$

Применяя, как и раньше, логарифм

$$\operatorname{Ln}(2\pm\sqrt{3}) = \left\{\ln(2\pm\sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\},$$

мы получим следующую формулу для корней исходного уравнения:

$$z = \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\ln(2\pm\sqrt{3}) \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

Теперь не составляет труда доказать, что и любое уравнение вида $\sin w = z$ или $\cos w = z$ имеет решение, так что синус и косинус комплексного переменного могут принимать любые значения. Иными словами, множества значений синуса и косинуса — это все множество **C**.

О происхождении формулы Эйлера. Проведенные только что рассуждения и вычисления убедительно показывают целесообразность обобщений показательной и тригонометрических функций на множество комплексных чисел. Тем не менее изложенная схема определения этих функций оставляет все же впечатление некоторой искусственности. В частности,— и это весьма серьезный «психологический» недостаток этой схемы — совершенно неясно, почему выражение $\cos x + i\sin x$ мы обозначили e^{ix}, а не, скажем, 2^{ix}. Ведь показательная функция 2^x ничем не «хуже» функции e^x, и от этого изменения обозначения в нашем изложении буквально ничего не изменится.

На самом деле определение соответствующих функций в математике дается совершенно иное, основанное на других идеях. Это не означает, конечно, что наши рассуждения неверны — с логической точки зрения они безупречны.

В то же время «настоящее» математическое определение показательной и тригонометрических функций комплексного переменного опирается на довольно сложный математический аппарат теории степенных рядов от действительного и комплексного переменного. В принципе и эта теория не так уж сложна, но для ее построения со всей требуемой математической строгостью требуется значительно больше времени, чем мы располагаем. Эта теория изучается в высших учебных заведениях. Мы опишем соответствующие построения только в общих чертах.

Если обозначить через $S_n(x)$ и $T_n(x)$ функции

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$T_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

то оказывается, что при любом фиксированном $x \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \cos x = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Поэтому говорят, что функции синус и косинус являются суммами соответствующих степенных рядов

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \tag{21}$$

Можно установить также, что при любом $x \in \mathbf{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right),$$

и, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. \tag{22}$$

И если теперь полностью забыть о математической строгости и в ряд (22) вместо x подставить ix и проделать перегруппировку слагаемых, то мы получим в силу (20) и (21)

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} +$$
$$+ \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) +$$
$$+ i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x.$$

Тем самым мы пришли к формуле Эйлера. Разумеется, проделанные «вычисления» далеки от доказательства, поскольку мы проделали ряд преобразований без всякого их осмысления и оправдания: например, в равенство (20), полученное для действительных x, подставили мнимое выражение ix; даже не подумали о том, как понимать бесконечную сумму с комплексными слагаемыми, ведь для комплексных чисел у нас нет понятия предела; перегруппировывали бесконечные суммы — у нас нет такого права, и это не пустое опасение, поскольку, как показывается в строгой теории, перестановка слагаемых в бесконечной сумме может ее изменить.

Тем не менее происхождение формулы Эйлера из этих необоснованных выкладок можно понять. В частности, теперь более понятно, почему мы ввели обозначение e^{ix}, а не 2^{ix}.

Более того, проделанные выкладки указывают, какую именно математическую теорию надо строить в множестве комплексных чисел для строгого доказательства формулы Эйлера — теорию степенных рядов. Эта теория и была построена, но значи-

тельно позже, чем Л. Эйлер — чисто интуитивно — пришел к своей знаменитой формуле.

В основе этой теории лежит, естественно, теория пределов функций комплексного переменного. Определение предела при этом выглядит буквально так же, как и для функции действительного переменного:

Число A называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что при любом z таком, что $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$, или

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Пределы функций комплексного переменного обладают обычными свойствами пределов действительных функций. Теория пределов позволяет дать определения непрерывной функции, производной и фактически построить всю теорию степенных рядов. Тогда можно определить экспоненту, синус и косинус рядами (20), (21), (22), и, как показывается в теории, наша подстановка ix в ряд (22) и последующие преобразования вполне оправданы.

В теории степенных рядов оказывается, в частности, что степенные ряды можно дифференцировать почленно, как и многочлены, а тогда, дифференцируя ряды (20), (21), (22), немедленно убеждаемся, что и справедливы «естественные» формулы

$$(\sin z)' = \sin z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$$
$$(e^z)' = e^z. \tag{23}$$

Формула (23) нам понадобится в следующем параграфе для применения комплексных чисел к решению дифференциальных уравнений.

Упражнения

79. Вычислить:

а) $e^{1+\pi i}$;
б) e^{2+i};
в) $\operatorname{Ln} 1$;
г) $\operatorname{Ln}(-1)$;
д) $\operatorname{Ln}(-i)$;
е) $\operatorname{Ln} i$.

80. Во что переходят при отображении $z \to e^z$ прямые:

а) $\operatorname{Re} z = 0$;
б) $\operatorname{Re} z = a$;
в) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}$;
г) $\operatorname{Im} z = a$?

81. Доказать, что для функций $w = \sin z$, $w = \cos z$ и $w = \operatorname{tg} z$ справедливы все формулы школьной тригонометрии, например, такие, как теоремы сложения, формулы двойного угла и т. д.

82. Решить уравнения:

а) $\sin z = 3$;
б) $\cos z = -1$;
в) $\operatorname{tg} z = i$;
г) $e^z = -1$.

83. Найти, при каких z будут действительны:

а) $\sin z$; б) $\cos z$.

84. Определим возведение в комплексную степень при помощи логарифма, положив $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$. Таким образом, функция $z \to a^z$ оказывается, как и логарифм, многозначной. Пользуясь этим определением, вычислить:

а) i^i; б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$; в) i^{1+2i}.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Основная теорема алгебры многочленов и ее следствия. Теория многочленов с комплексными коэффициентами оказывается более стройной и более простой, чем теория многочленов с действительными коэффициентами, и объясняется это именно основной теоремой, справедливой для многочленов с комплексными коэффициентами. Сформулируем ее:

Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.

Эта теорема впервые строго была доказана немецким математиком К. Ф. Гауссом и часто называется поэтому *теоремой Гаусса.* Для доказательства этой теоремы требуются утверждения, далеко выходящие за рамки наших возможностей, и мы поэтому приводить его не будем.

Главное для нас — это следствия, которые вытекают из основной теоремы.

1. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение n линейных множителей.*

Это утверждение легко доказывается по индукции. При $n = 1$ сам многочлен является линейным. Предположим, что утверждение уже доказано для многочленов степени n, и пусть $f(x)$ — многочлен степени $n+1$. Тогда $f(x)$ имеет некоторый корень $\alpha_1 \in \mathbf{C}$, и по теореме Безу $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x).$$

Но многочлен $f_1(x)$ имеет степень n, и по предположению индукции раскладывается в произведение n линейных множителей. Но тогда $f(x)$ является произведением $n+1$ линейного множителя, что и требовалось доказать.

2. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет n корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.*

Действительно, как мы только что доказали, многочлен степени $n \geqslant 1$ раскладывается в произведение n линейных множителей:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n).$$

Ясно при этом, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — это корни многочлена $f(x)$. Объединяя в последнем равенстве равные сомножители в степени, $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = a_0(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2}\ \ldots\ (x-\beta_s)^{k_s},$$

где корни $\beta_1, \ldots, \beta_s$ уже все различны, а показатели $k_1, \ldots, k_s$ — это кратности соответствующих корней.

Поскольку степени многочленов в левой и правой частях этого равенства, естественно, одинаковы, то

$$n = k_1 + k_2 + \ \ldots\ + k_s,$$

что и требовалось доказать.

3. *Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ тогда и только тогда, когда всякий корень $f(x)$ является корнем $g(x)$ и кратность его в $g(x)$ не больше кратности в $f(x)$.*

Докажите это утверждение самостоятельно, используя разложение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ на линейные множители.

Отметим, что для многочленов с действительными коэффициентами соответствующее утверждение неверно; например, многочлен $x+1$ не делится на многочлен $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$, хотя оба они имеют ровно один корень -1.

Основная теорема алгебры многочленов позволяет для многочленов любой степени сформулировать утверждение, которое при $n=2$ доказывается в школьном курсе под названием теорема Виета. Это утверждение и в общем случае называется *теоремой Виета.*

4. *Пусть*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \ldots\ + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_0 \neq 0) —$$

многочлен с комплексными коэффициентами. Тогда для любого $k=1, \ldots, n$ сумма всевозможных произведений корней многочлена $f(x)$, состоящих из k сомножителей, равна $(-1)^k \frac{a_n}{a_0}$.

В частности, *сумма всех корней многочлена $f(x)$ равна $-\frac{a_1}{a_0}$, сумма попарных произведений равна $\frac{a_2}{a_0}$, произведение всех корней равно $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$.*

Доказательство теоремы Виета для произвольного k довольно громоздко, и мы ограничимся только крайними случаями: $k=1$ и $k=n$. Представим $f(x)$ в виде:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n)$$

и тогда после раскрытия скобок в правой части будем иметь:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n=$$
$$=a_0x^n-a_0(\alpha_1+\ \dots\ +\alpha_n)x^{n-1}+\ \dots\ +(-1)^n a_0\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_n.$$

Но, как мы видели в § 2, если два многочлена равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях x. Поэтому

$$-a_0(\alpha_1+\ \dots\ +\alpha_n)=a_1,$$
$$(-1)^n a_0\alpha_1\ \dots\ \alpha_n=a_n,$$

откуда и следует требуемое равенство.

Следующее утверждение является одним из показательных примеров применения комплексных чисел к задачам «чисто действительным», не имеющим в своей постановке к комплексным числам никакого отношения.

5. *Всякий многочлен степени $n\geqslant 1$ с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами, имеющими действительные коэффициенты.*

Это утверждение мы докажем индукцией по степени n. Для многочленов степени 1 и 2 утверждение верно; предположим, что оно справедливо для любых многочленов степени $\leqslant n$, и пусть $f(x)$ имеет степень $n+1$.

Многочлен $f(x)$ имеет комплексный корень α. По теореме Безу

$$f(x)=(x-\alpha)g(x), \qquad (1)$$

и если число α действительное, то $g(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Тогда по предположению индукции $g(x)$ раскладывается в произведение требуемого вида. Но тогда в силу (1) такое разложение существует и для многочлена $f(x)$.

Пусть теперь α — число мнимое, т. е. $\overline{\alpha}\neq\alpha$. Вспомним следствие из теоремы о свойствах сопряженных чисел (с. 101); согласно этому следствию число $\overline{\alpha}$ также является корнем многочлена $f(x)$. Тогда из (1) при $x=\overline{\alpha}$ получаем, что $f(\overline{\alpha})=(\overline{\alpha}-\alpha)g(\overline{\alpha})$, и, следовательно, $g(\overline{\alpha})=0$. Снова применяя теорему Безу, будем иметь:

$$g(x)=(x-\overline{\alpha})h(x),$$

а тогда из (1) получаем:

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})h(x)=(x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha})h(x). \qquad (2)$$

Поскольку $\alpha+\overline{\alpha}$ и $\alpha\overline{\alpha}$ — числа действительные, то трехчлен $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ имеет действительные коэффициенты (и, очевидно, отрицательный дискриминант), так что и многочлен $h(x)$ имеет действительные коэффициенты как частное двух многочленов с действительными коэффициентами.

Но многочлен $h(x)$ имеет степень меньше n, так что к нему применимо предположение индукции. После этого требуемое утверждение для многочлена $f(x)$ вытекает из равенства (2).

Теорема доказана.

Применим полученные следствия к решению задач, сформулированных в § 1, и некоторых других.

Задача. *Доказать, что при любых натуральных p и q число $(p+1)^{2q+1}+p^{q+2}$ делится на p^2+p+1.*

Рассмотрим многочлен $f(x)=(x+1)^{2q+1}+x^{q+2}$ и покажем, что он делится на квадратный трехчлен x^2+x+1. Этот трехчлен имеет два различных корня α и β, и поэтому в силу следствия 3 достаточно показать, что числа α и β являются корнями $f(x)$.

Заметим теперь, что число α по определению таково, что $\alpha^2=-\alpha-1$, и, с другой стороны, $\alpha^2+\alpha+1=\frac{\alpha^3-1}{\alpha-1}$, так что $\alpha^3=1$. Поэтому

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^{2q+1}+\alpha^{q+2}=(-\alpha^2)^{2q+1}+\alpha^{q+2}=$$
$$=-(\alpha^2)^{2q+1}+\alpha^{q+2}=-\alpha^{4q+2}+\alpha^{q+2}=$$
$$=\alpha^{q+2}(1-\alpha^{3q})=0.$$

Аналогично показывается, что $f(\beta)=0$, так что $f(x)$ действительно делится на x^2+x+1. Способ деления углом показывает при этом, это частное $g(x)$ будет иметь целые коэффициенты, а тогда мы получим, что будет выполняться равенство

$$f(p)=(p^2+p+1)g(p),$$

в котором $g(p)$ — целое число. Но это и требовалось доказать.

Задача. *При каких $n\in\mathbf{Z}$ число $n^{44}+n+1$ простое?*

При $n=0$ и $n=-1$ это число равно 1 и простым не является, при $n=1$ оно равно 3.

Докажем, что при всех остальных n число будет составным.

Рассмотрим многочлен $f(x)=x^{44}+x+1$ и докажем, что он делится на квадратный трехчлен x^2+x+1. Пусть, как и выше, α и β корни квадратного трехчлена. Тогда $f(\alpha)=\alpha^{44}+\alpha+1=\alpha^2+\alpha+1=0$, аналогично $f(\beta)=0$.

В силу следствия 3,

$$x^{44}+x+1=(x^2+x+1)\cdot P(x),$$

где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Так как при $n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$, $n\neq 1$, $n\neq -1$, $n^{44}+n+1>n^2+n+1$, то n^2+n+1 — делитель числа не равный единице и самому числу.

Задача. *Разложить на множители многочлены*

$$x^5+x+1,\ x^{10}+x^5+1,\ x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1.$$

Используем ту же идею, что и при решении предыдущей задачи. Заметим, что если α является корнем квадратного трехчлена x^2+x+1, то $\alpha^3=1$, и тогда

$$\alpha^5+\alpha+1=\alpha^2+\alpha+1=0,\ \alpha^{10}+\alpha^5+1=\alpha+\alpha^2+1=0.$$

Следовательно, многочлены x^5+x+1 и $x^{10}+x^5+1$ делятся на x^2+x+1; частные от деления можно получить вычислением, но мы этого делать не будем.

К многочлену $f(x)=x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ этот прием буквально в том же виде ничего не дает, но если мы заметим, что

$$f(x)=\frac{x^{55}-1}{x^{11}-1},$$

то возникает идея использовать корни пятой степени из 1 отличные от 1, т. е. корни многочлена $x^4+x^3+x^2+x+1$. И действительно, этот многочлен имеет четыре различных корня, и если α — любой из них, то $\alpha^5=1$,

$$f(\alpha)=\alpha^{44}+\alpha^{33}+\alpha^{22}+\alpha^{11}+1=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0.$$

Поэтому $f(x)$ делится на $x^4+x^3+x^2+x+1$, а коэффициенты частного мы находить не будем.

Задача. *Можно ли многочлен x^4+x^2+1 представить в виде суммы квадратов двух многочленов?*

Мы докажем, что любой многочлен $f(x)$, с действительными коэффициентами, положительный при любом $x\in\mathbf{R}$, представляется в виде суммы квадратов двух многочленов.

Равенство

$$f(x)=u^2(x)+v^2(x)=[u(x)+iv(x)][u(x)-iv(x)]$$

приводит нас к идее представить многочлен $f(x)$ как произведение двух взаимно сопряженных многочленов $u(x)+iv(x)$ и $u(x)-iv(x)$, где многочлены $u(x)$ и $v(x)$ сами имеют действительные коэффициенты.

По первому следствию основной теоремы многочлен $f(x)$ раскладывается на линейные множители, а по следствию из теоремы о свойствах сопряженных чисел его корни разбиваются на пары взаимно сопряженных чисел:

$$f(x)=a_0[(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_s)][(x-\overline{\alpha_1})\ldots(x-\overline{\alpha_s})]=$$
$$=a_0g(x)h(x).$$

Многочлены $g(x)$ и $h(x)$ имеют комплексные коэффициенты, и их коэффициенты при одинаковых степенях x взаимно сопряжены. Следовательно, если мы выделим в многочлене $g(x)$ действительную и мнимую части, т. е. представим его в виде

$$g(x)=u(x)+iv(x),$$

где многочлены $u(x)$ и $v(x)$ имеют действительные коэффициенты, то многочлен $h(x)$ будет равен $u(x)-iv(x)$. Но тогда

$$f(x)=a_0[u(x)+iv(x)][u(x)-iv(x)]=a_0[u^2(x)+v^2(x)],$$

так что требуемое разложение многочлена $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=[\sqrt{a_0}u(x)]^2+[\sqrt{a_0}v(x)]^2.$$

(Ясно, что $a_0>0$ — в противном случае при достаточно больших x многочлен $f(x)$ отрицателен.)

И еще несколько задач, связанных с использованием теоремы Виета. При их решении мы будем пользоваться легко проверяемыми тождествами

$$(x_1+\ \dots\ +x_n)^2=x_1^2+\ \dots\ +x_n^2+2(x_1x^2+\ \dots\ +x_1x_n+ \\ +\ \dots\ +x_{n-1}x_n), \qquad (3)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left((x+y+z)^2-3xy-3xz-3yz\right). \qquad (4)$$

Второе тождество сразу следует из тождества примера 5 § 2 п. 3.

1. *Найти сумму квадратов корней степени* 1980 *из числа* $2-i$.

Обозначим рассматриваемые корни через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $n=1980$. Эти числа являются корнями многочлена $z^n-(2-i)$, и по теореме Виета их сумма равна 0, так же, как и сумма их попарных произведений. Тогда из тождества (3) следует, что сумма квадратов этих корней также равна 0.

2. *Найти сумму кубов корней уравнения:*

$$x^3+3x^2-8x-4=0.$$

Если α, β, γ — корни этого уравнения, то по теореме Виета

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta\gamma=4,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-8,$$

а тогда из тождества (3) получаем:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=12+(-3)(9+24)=-87.$$

3. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

Если (α, β, γ) — решение данной системы, то из тождества (3) при $n=3$ получаем:

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3,$$

а тогда из тождества (4) следует, что

$$\alpha\beta\gamma=1.$$

Поскольку из первого уравнения системы следует еще, что

$$\alpha+\beta+\gamma=3,$$

то по теореме Виета мы получаем, что α, β, γ являются корня-

ми уравнения $t^3-3t^2+3t-1=0$. Однако левая часть этого уравнения равна $(t-1)^3$, так что все три его корня равны 1.

Следовательно, $\alpha=\beta=\gamma=1$. Легко проверить, что тройка (1, 1, 1) удовлетворяет исходной системе и является, следовательно, ее единственным решением.

4. *Числа a, b, c связаны равенством*

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Доказать, что какие-либо два из них противоположны.

Заданное соотношение между числами a, b, c легко переписывается в виде

$$abc=(a+b+c)(ab+ac+bc). \tag{5}$$

Пусть a, b, c являются корнями кубического уравнения

$$t^3+pt^2+qt+r=0. \tag{6}$$

Тогда теорема Виета позволяет записать соотношение (5) в виде $-r=(-p)q$, после чего уравнение (6) легко переписывается в виде

$$(t+p)(t^2+q)=0.$$

Поэтому один из корней этого уравнения равен $-p$; пусть, например, $c=-p$. Тогда получаем $c=a+b+c$, $a+b=0$, что и требовалось доказать.

Упражнения

85. Разложить на линейные множители:

а) x^4+4; б) $x^8+4x^6+4x^2+16$; в) $x^{12}+x^6+1$.

86. Следующие многочлены разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

а) x^2+4; в) x^4+x^2+1;
б) x^6+27; г) x^4-x^2+1.

87. Найти все пары комплексных чисел p и q, при которых z^3+i делится на z^2+pz+q.

88. При каких a и m многочлен $x^{2m}+ax^m+1$ делится на x^2+1?

89. При каких m многочлен $x^{2m}+x^m+1$ делится на x^2+x+1?

90. Для каких m и n многочлен x^m+1 делится на x^n+1?

91. Доказать, что число $n^{26}+n+1$ при любом натуральном $n\neq 1$ составное.

92. Найти все действительные λ, при которых один из корней уравнения $x^3-7x+\lambda=0$ равен удвоенному другому корню этого же уравнения.

93. Сумма двух корней уравнения $x^3-2x^2-5x+\lambda=0$ равна 1. Найти λ и решить это уравнение.

94. Доказать, что многочлен $x^{39}+(x^2+x+1)(1-x^{13})x^{12}-1$ делится на $x^6-x^5-x^4+x^2+x-1$.

95. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{23}{15}, \\ xy+xz+yz=23. \end{cases}$

96. Доказать, что многочлен $x^{105}-9$ нельзя разложить на два множителя с целыми коэффициентами.

97. Доказать, что если сумма трех чисел a, b и c равна нулю, то

$$a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=0.$$

2. Классификация перемещений плоскости. В этом пункте мы применим комплексные числа для решения важного геометрического вопроса — описания всевозможных перемещений плоскости.

Пусть f — некоторое перемещение плоскости. Напомним, что перемещение — это такое отображение плоскости на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

Выберем на плоскости систему координат. Тогда перемещение f каждому комплексному числу z ставит в соответствие некоторое число $f(z)$, и при этом расстояние между любыми точками z и t равно расстоянию между их образами $f(z)$ и $f(t)$. Согласно геометрическому смыслу разности комплексных чисел, расстояние между z и t равно $|z-t|$, расстояние между $f(z)$ и $f(t)$ равно $|f(z)-f(t)|$; таким образом, отображение f обладает следующим свойством: для любых z, $t\in\mathbf{C}$

$$|f(z)-f(t)|=|z-t|. \tag{7}$$

Это свойство и есть фактически определение перемещения на языке комплексных чисел.

Итак, пусть функция комплексного переменного $f(z)$ удовлетворяет условию (7). Мы докажем, что $f(z)$ имеет в действительности весьма простой вид. При этом мы для простоты будем иногда пользоваться не только комплексными числами, но и простыми геометрическими соображениями, хотя без них можно было бы обойтись и дать «чисто комплексное» решение.

Сначала рассмотрим случай, когда функция $f(z)$ имеет неподвижные точки 0 и 1, т. е. выполняются равенства

$$f(0)=0,\ f(1)=1. \tag{8}$$

Тогда при $t=0$ и при $t=1$ из (7) получаем тождества

$$|f(z)|=|z|,\ |f(z)-1|=|z-1|. \tag{9}$$

Рассмотрим такую точку $z_0 \in \mathbf{C}$, для которой $f(z_0) \neq z_0$. По условию (9) выполняются равенства

$$|f(z_0) - 0| = |z_0 - 0|, \quad |f(z_0) - 1| = |z_0 - 1|.$$

Эти равенства означают, что каждая из точек 0 и 1 равноудалена от точек z_0 и $f(z_0)$. Следовательно, прямая, проходящая через точки 0 и 1, т. е. ось абсцисс, является серединным перпендикуляром отрезка, соединяющего точки z_0 и $f(z_0)$. Иначе говоря, точки z_0 и $f(z_0)$ симметричны относительно оси абсцисс а это означает, что $f(z_0) = \bar{z}_0$.

Мы доказали тем самым, что если $f(z) \neq z$, то $f(z) = \bar{z}$, т. е. при отображении f всякая точка z либо остается на месте, либо переходит в сопряженную. Сейчас мы докажем, что имеет место более сильное утверждение: *либо каждая точка остается на месте, т. е. f — тождественное отображение $z \to z$, либо каждая точка переходит в свою сопряженную, т. е. f — отображение $z \to \bar{z}$.*

Если число z действительно, то по доказанному $f(z) = z = \bar{z}$, и поэтому далее мы будем рассматривать только мнимые числа z. Предположим, что существуют два мнимых числа z и t, одно из которых неподвижно, а другое переходит в сопряженное: $f(z) = z$, $f(t) = \bar{t}$. Из условия (7) получаем равенство

$$|z - \bar{t}| = |z - t|,$$

означающее, что точка z лежит на серединном перпендикуляре отрезка $t\bar{t}$. Но этот перпендикуляр есть не что иное, как ось абсцисс, и мы получили, что число z действительное, что по предположению неверно.

Таким образом, либо все мнимые числа неподвижны, либо все они переходят в свои сопряженные; и требуемое утверждение доказано.

Сформулируем итог: *если перемещение плоскости f имеет неподвижные точки 0 и 1, то f либо тождественное отображение $z \to z$, либо отображение $z \to \bar{z}$.*

Пусть теперь f — произвольное перемещение плоскости; введем новое отображение, определив его формулой

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}.$$

Заметим, что в силу (6)

$$|f(1) - f(0)| = 1, \tag{10}$$

так что знаменатель рассматриваемой дроби отличен от 0. Оказывается, что g также перемещение плоскости; в самом деле,

$$|g(z) - g(t)| = \left| \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)} - \frac{f(t) - f(0)}{f(1) - f(0)} \right| =$$

$$= \left| \frac{f(z) - f(t)}{f(1) - f(0)} \right| = \frac{|f(z) - f(t)|}{|f(1) - f(0)|} = \frac{|z - t|}{1} = |z - t|.$$

Легко проверить, что $g(0)=0$, $g(1)=1$, т. е. g удовлетворяет условиям (8) — имеет неподвижные точки 0 и 1. Поэтому к перемещению g можно применить полученный результат: для любого $z\in\mathbf{C}$ либо $g(z)=z$, либо $g(z)=\bar{z}$.

Обозначим число $f(0)$ для краткости через b; число $f(1)-f(0)$, модуль которого в силу (10) равен 1, имеет тригонометрическую форму $\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha<2\pi)$, вместо которой — опять же только для краткости — мы будем использовать «показательную» форму $e^{i\alpha}$. Тогда из определения g получаем равенство $f(z)=g(z)e^{i\alpha}+b$ и мы приходим к двум формулам для отображения f:

$$f(z)=ze^{i\alpha}+b,\ f(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+b.$$

Эти формулы мы и рассмотрим с геометрической точки зрения.

Рассмотрим сначала случай

$$f(z)=ze^{i\alpha}+b.$$

Эта формула означает, что для получения $f(z)$ число z следует умножить на $e^{i\alpha}$ и к результату прибавить b. Но умножение на $e^{i\alpha}$ — это — на геометрическом языке — поворот с центром O на угол α, а прибавление числа b — это параллельный перенос $b=\overrightarrow{Ob}$. Таким образом, в рассматриваемом случае перемещение f есть композиция поворота и переноса.

Этим геометрическим результатом можно было бы и удовлетвориться, но оказывается, что можно дать и более простое описание перемещения f; в действительности при $\alpha=0$ — это перенос, а при $\alpha\neq0$ — поворот на угол α, но не вокруг O, а вокруг некоторой точки z_0. Для нахождения центра этого поворота воспользуемся тем, что центр z_0 должен быть неподвижной точкой перемещения f, т. е. удовлетворять уравнению $f(z)=z$, или

$$ze^{i\alpha}+b=z.$$

Так как $\alpha\neq0$, то $e^{i\alpha}\neq1$, и это уравнение имеет единственное решение $z_0=\dfrac{b}{1-e^{i\alpha}}$; мы покажем сейчас, что f — поворот вокруг z_0.

Для этого, отвлекшись сначала от перемещения f, выясним, как выглядит на языке комплексных чисел формула поворота h на угол α вокруг точки z_0. Для этого заметим (рис. 16), что

$$h(z)-z_0=(z-z_0)e^{i\alpha},$$

и, следовательно, $h(z)=(z-z_0)e^{i\alpha}+z_0$.

Выражение $f(z)$ также можно представить в таком виде:

$$f(z)=\left(z-\frac{b}{1-e^{i\alpha}}\right)e^{i\alpha}+\frac{b}{1-e^{i\alpha}},$$

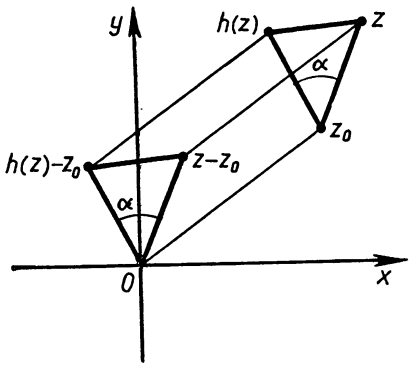

Рис. 16

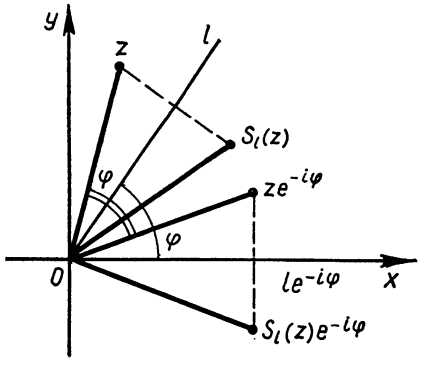

Рис. 17

и поэтому f действительно есть поворот на угол α вокруг точки z_0.

Итак, в рассматриваемом случае f есть либо параллельный перенос при $\alpha=0$, либо поворот на угол α с центром z_0.

Теперь рассмотрим второй случай:

$$f(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+b.$$

Нетрудно заметить, что в этом случае f является композицией осевой симметрии относительно оси абсцисс, поворота на угол α вокруг O и параллельного переноса $\vec{b}$. Как и в первом случае, перемещение f можно описать более просто; правда, в данном случае не удастся полностью освободиться от композиции.

Выясним сначала, как на языке комплексных чисел выглядит формула, задающая осевую симметрию S_l с осью l, проходящей через O. Если прямая l составляет с осью абсцисс угол φ (рис. 17), то после поворота на угол $-\varphi$ она совпадает с осью абсцисс, а образ точки $S_l(z)$ после этого поворота будет сопряжен с образом точки z, т. е. выполняется равенство

$$S_l(z)\,e^{-i\varphi}=\overline{ze^{-i\varphi}},$$

откуда

$$S_l(z)=\overline{\bar{z}e^{-i\varphi}}e^{i\varphi}=\bar{z}e^{i\varphi}e^{i\varphi}=\bar{z}e^{2i\varphi}. \qquad (11)$$

Теперь видно, что перемещение f является композицией осевой симметрии S_l с осью l, проходящей через O под углом $\varphi=\frac{\alpha}{2}$ к оси абсцисс, и параллельного переноса $\vec{b}$. При $b=0$ мы имеем «чистую» осевую симметрию, а случай $b\neq 0$ рассмотрим более детально.

Вектор $\vec{b}$ представим в виде суммы векторов $\vec{c}+\vec{d}$, таких, что $OC\parallel l$, $OD\perp l$ (рис. 18); тогда

$$f(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+d+c.$$

Выясним, что за перемещение задается формулой

$$h(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+d.$$

Как мы уже видели, это есть композиция осевой симметрии S_l, где $(\widehat{l, Ox})=\frac{\alpha}{2}$, и параллельного переноса $\vec{d}$ в направлении, перпендикулярном оси l.

Докажем, что эта композиция есть осевая симметрия с осью m, параллельной l и проходящей через точку $d/2$.

Для этого надо доказать, что точка $S_l(z)+d$ симметрична точке z относительно прямой m. Ясно, что прямая $AK\perp m$; кроме того,

$$|KM|=|PM|-|PK|=|PE|+(|EM|-|PK|)=|PE|-|EM|=$$
$$=|AE|-|EM|=|AM|,$$

тем самым требуемое утверждение доказано.

Таким образом, рассматриваемое отображение f есть композиция осевой симметрии с осью m, проходящей через точку $d/2$ под углом $\alpha/2$ к оси абсцисс, и параллельного переноса $\vec{c}$ в направлении оси m.

Мы видим, что появляется перемещение нового для нас вида — композиция осевой симметрии и параллельного переноса в направлении оси симметрии. Это перемещение называется *скользящей симметрией*; происхождение этого названия понятно из рисунка 19.

Отметим, что скользящая симметрия не может быть сведена к предыдущим, «школьным» типам перемещений: это следует, например, из того, что скользящая симметрия не имеет неподвижных точек, и поэтому не может быть ни поворотом, ни осевой симметрией; не может она быть и параллельным переносом: если $S_l\circ\vec{c}$ есть параллельный перенос, т. е. $S_l\circ\vec{c}=\vec{p}$, то

$$S_l=S_l\circ\vec{c}\circ(-\vec{c})=\vec{p}\circ(-\vec{c})=\vec{p}-\vec{c},$$

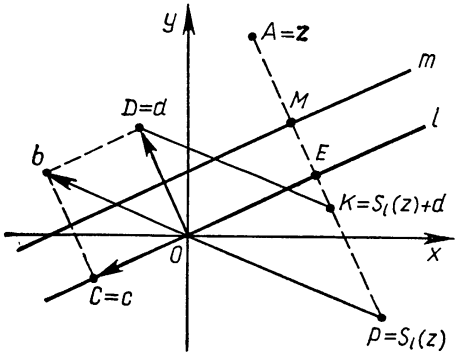

Рис. 18

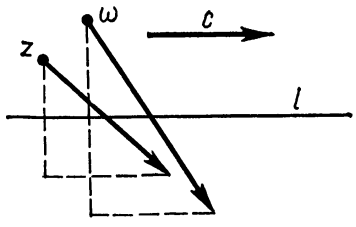

Рис. 19

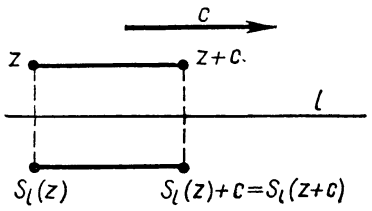

Рис. 20

и, следовательно, перемещение S_l само есть параллельный перенос, что неверно.

Из свойств скользящей симметрии отметим, что композицию симметрии S_l и переноса $\vec{c}$ можно выполнить в любом порядке:

$$S_l \circ \vec{c} = \vec{c} \circ S_l. \qquad (12)$$

Это утверждение можно доказать строго, но мы ограничимся геометрической иллюстрацией (рис. 20).

Для подведения окончательного итога заметим, что тождественное перемещение является параллельным переносом $\vec{0}$, и тогда можно сформулировать основную теорему о классификации перемещений.

Теорема. ***Имеются следующие виды перемещений: тождественное, ненулевой параллельный перенос, поворот на угол, отличный от 0, осевая симметрия и скользящая симметрия.***

Применим полученную классификацию перемещений к решению задач.

1. *Сколько неподвижных точек может иметь перемещение?*

Решение этой задачи совершенно очевидно: при тождественном перемещении все точки неподвижны; поворот на ненулевой угол α имеет ровно одну неподвижную точку; неподвижные точки осевой симметрии составляют прямую — ось симметрии; наконец, параллельный перенос и косая симметрия не имеют неподвижных точек.

Таким образом, перемещение может либо не иметь неподвижных точек, либо иметь одну неподвижную точку, либо иметь прямую неподвижных точек, либо иметь все точки неподвижными.

В качестве следствия этой задачи можно получить ряд более частных утверждений; например, если при перемещении f две точки неподвижны, то f является либо осевой симметрией, либо тождественным перемещением; если неподвижны три точки, не лежащие на одной прямой, то f — тождественное перемещение.

Рассмотрим задачу 9, сформулированную в § 1.

2. *При перемещении f точки A и B переходят друг в друга. Найти образ произвольной точки плоскости при перемещении f.*

Конечно, легко указать два перемещения, удовлетворяющие условию задачи,— это осевая симметрия относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AB и центральная симметрия относительно середины O этого отрезка. Но существуют ли другие перемещения, обладающие этим свойством?

Докажем, что в действительности перемещение S_l и Z_O исчерпывают все решения задачи. По условию для перемещения f выполняются равенства

$$f(A)=B,\ f(B)=A,$$

применив к ним отображение f, получим, что

$$f\big(f(A)\big)=f(B)=A,\quad f\big(f(B)\big)=f(A)=B,$$

означающие, что точки A и B неподвижны при композиции $f\circ f$. Согласно первой решенной задаче $f\circ f$ есть либо осевая симметрия, либо тождественное перемещение.

В соответствии с полученной классификацией перемещений рассмотрим отдельные случаи.

а) Если f — поворот, то $f\circ f$ также поворот; поэтому $f\circ f$ не является осевой симметрией, так что $f\circ f$ — тождественное перемещение. Но это может быть только в случае, когда угол поворота равен π, а центр поворота в нашем случае — это, конечно, точка O. Другими словами, f — это центральная симметрия Z_0.

б) Если f — параллельный перенос, отличный от $\vec{0}$, то $f\circ f$ также параллельный перенос, отличный от $\vec{0}$, так что f не удовлетворяет условию задачи.

в) Если f — осевая симметрия, то $f\circ f$ — тождественное перемещение. Ясно, что ось этой симметрии — прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

г) Пусть, наконец, f — косая симметрия $S_m\circ\vec{a}$; тогда в силу (12)

$$f\circ f=S_m\circ\vec{a}\circ S_m\circ\vec{a}=S_m\circ S_m\circ\vec{a}\circ\vec{a}=E\circ 2\vec{a}=2\vec{a},$$

и поэтому $f\circ f$ не является ни осевой симметрией, ни тождественным перемещением, т. е. f не удовлетворяет условию задачи.

3. *Каким перемещением является композиция двух осевых симметрий* S_l и S_m?

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l и m пересекаются в некоторой точке O. Примем эту точку за начало координат; прямую l примем за ось абсцисс, и пусть α — угол между прямыми l и m. Тогда $S_l(z)=\bar{z}$, а в силу формулы (11) симметрия S_m может быть записана в виде $S_m(z)=\bar{z}e^{2i\alpha}$, поэтому

$$(S_l\circ S_m)(z)=S_l(S_m(z))=\overline{\bar{z}e^{2i\alpha}}=ze^{-2i\alpha},$$

и, следовательно, композиция $S_l\circ S_m$ есть поворот на угол -2α с центром O.

Если же прямые l и m параллельны, то снова, взяв l в качестве оси абсцисс и произвольным образом выбрав на ней на-

чало координат O, заметим, что, как и раньше, $S_l(z)=\bar{z}$, а применив отображение $-\vec{b}$ (рис. 21), получим:

$$\overline{z-b}=S_m(z)-b,$$

и поскольку b — чисто мнимое число, т. е. $\bar{b}=-b$, то

$$\bar{z}+b=S_m(z)-b,$$

так что

$$S_m(z)=\bar{z}+2b. \tag{13}$$

Но тогда

$$(S_l \circ S_m)(z)=S_l(S_m)(z)=\overline{\bar{z}+2b}=z-2b,$$

т. е. $S_l \circ S_m$ — параллельный перенос $-2\vec{b}$.

4. *Каким перемещением является композиция осевой симметрии S_l и поворота R_0^α?*

Пусть сначала $O\in l$; примем O за начало координат, l — за ось абсцисс. Тогда

$$S_l(z)=\bar{z},\quad R_o^\alpha(z)=ze^{i\alpha},$$

$$(S_l \circ R_o^\alpha)(z)=S_l(R_0^\alpha(z))=\overline{ze^{i\alpha}}=\bar{z}e^{-i\alpha}.$$

Но это означает, что $S_l \circ R_0^\alpha$ есть осевая симметрия относительно прямой m, составляющей с l угол $-\alpha/2$ (рис. 22).

Аналогично

$$(R_0^\alpha \circ S_l)(z)=R_0^\alpha(S_l(z))=\bar{z}e^{i\alpha},$$

так что $R_0^\alpha \circ S_l$ также есть осевая симметрия, но относительно прямой n.

Если теперь $O\in l$, то, взяв в качестве оси абсцисс прямую, параллельную l (рис. 23), получим $R_0^\alpha(z)=ze^{i\alpha}$ и по равенству (13)

$$S_l(z)=\bar{z}+2b,$$

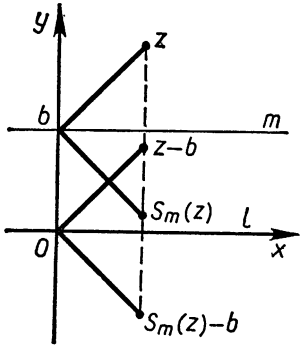

Рис. 21

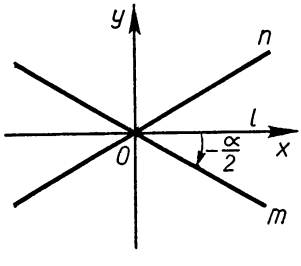

Рис. 22

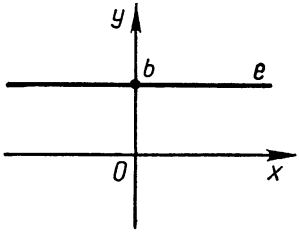

Рис. 23

так что

$$S_l(R_0^a(z)) = \overline{ze^{i\alpha}} + 2b = \bar{z}e^{-i\alpha} + 2b,$$
$$(R_0^a \circ S_l)(z) = (\bar{z} + 2b)\, e^{i\alpha} = \bar{z}e^{i\alpha}.$$

Поэтому композиция $S_l \circ R_0^a$ есть косая симметрия — $b \neq 0$ и $Ob \| l$.

Выше мы видели, что композиция двух осевых симметрий является либо поворотом, либо параллельным переносом. Оказывается, если задать некоторый поворот на угол α с центром O, то его можно представить как композицию осевых симметрий с осями, пересекающимися в точке O и составляющими между собой угол $\frac{\alpha}{2}$. Точно так же и всякий параллельный перенос b можно представить как композицию осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными отрезку Ob и находящимися на расстоянии $\frac{|b|}{2}$ друг от друга.

Далее, косая симметрия является по определению композицией осевой симметрии и параллельного переноса, т. е. является композицией трех осевых симметрий. Если условиться считать, что тождественное перемещение является композицией 0 осевых симметрий, то мы получили новую классификацию перемещений: *всякое перемещение является композицией* 0, 1, 2 *или* 3 *осевых симметрий.*

В заключение пункта рассмотрим еще один важный вопрос — координатная форма записи перемещений. Мы показали, что всякое перемещение плоскости задается одной из формул:

$$f(z) = ze^{i\alpha} + b, \quad f(z) = \bar{z}e^{i\alpha} + b.$$

Если $z = x + iy$, $f(z) = x' + iy'$, $b = c + id$, то в первом случае мы имеем:

$$x' + iy' = (x + iy)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + c + id,$$

откуда

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + c, \\ y' = y\sin\alpha + y\cos\alpha + d. \end{cases} \tag{14}$$

Во втором случае аналогично получаем:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c, \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + d. \end{cases} \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) показывают, как по координатам x, y точки плоскости вычислить координаты образа этой точки. Эти формулы играют важную роль в аналитической геометрии. Из них, кроме того, можно еще раз получить классификацию перемещений по числу неподвижных точек: для этого, скажем, в

первом случае надо выяснить, сколько решений имеет система двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$x = x\cos\alpha - y\sin\alpha + c,$$
$$y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + d.$$

Из практики решения таких систем вам известно, а строго это доказывается в алгебре, что такая система может либо не иметь ни одного решения, либо иметь одно решение, либо «прямую» решений, либо «плоскость» решений. Этот результат в точности совпадает с тем, что мы получили выше.

Упражнения

98. Найти образ прямой $y=2x-1$ при преобразовании: $z \to (1+i)z+i$.

99. Найти образ круга $|z-i| \leqslant 1$ при преобразованиях:
а) $z \to i\bar{z}+1$; б) $z \to 3z-i$; в) $z \to 2iz+i-2$.

100. Даны два поворота $R_{i}^{\frac{\pi}{2}}$ и $R_{1+i}^{\frac{\pi}{3}}$. Записать эти преобразования в виде $z \to az+b$ и выяснить, какими преобразованиями плоскости являются $R_{i}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{1+i}^{\frac{\pi}{3}}$ и $R_{1+i}^{\frac{\pi}{3}} \circ R_{i}^{\frac{\pi}{2}}$.

101. Доказать, что преобразование $z \to \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\bar{z}$ есть симметрия относительно некоторой прямой, и найти ее ось.

102. Найти: а) композицию поворота на угол 30° вокруг точки i и поворота на угол 60° вокруг точки $1-i$; б) композицию поворота на угол 90° вокруг точки $2+i$ и параллельного переноса $\vec{b} = \overrightarrow{O(1+i)}$; в) композицию поворота на угол α вокруг точки z_0 и поворота на угол β вокруг точки z_1; г) композицию симметрии относительно прямой $y=x+1$ и симметрии относительно прямой $y=2x-2$; д) композицию поворота вокруг точки $1-i$ на угол 70° и параллельного переноса на вектор $\vec{i}$.

103. Каким преобразованием плоскости может быть композиция двух скользящих симметрий?

104. Записать в виде $z \to a\bar{z}+b$: а) симметрию относительно прямой $y=x+1$; б) скользящую симметрию, которая переводит точку $1+i$ в $1-i$, а прямую $y=1-x$ в себя; в) композицию скользящей симметрии пункта б) и поворота на угол 90° вокруг точки i.

105. Найти все преобразования плоскости, композиция которых со скользящей симметрией предыдущей задачи является осевой симметрией.

106. Доказать, что преобразование плоскости $z \to az+b$, где $|a| \neq 1$, $a \neq 0$, есть композиция гомотетии и поворота.

Найти необходимые и достаточные условия, при которых это преобразование является гомотетией.

107. Найти прямые, которые переходят в себя при преобразовании $z \to a\bar{z}$, $|a| \neq 1$.

108. Доказать, что преобразование $z \to az+b$, $|a| \neq 1$ есть произведение симметрии и гомотетии. Найти ось симметрии, а также центр и коэффициент гомотетии.

109. Говорят, что преобразования плоскости $z \to f(z)$ и $z \to g(z)$ коммутируют, если $f \circ g = g \circ f$. Найдите все перемещения, коммутирующие с преобразованием: а) $z \to iz+2$; б) $z \to i\bar{z}-1$.

110. Найти все преобразования вида $z \to a\bar{z}+b$, коммутирующие с преобразованием $z \to iz-1$.

111. Найти все перемещения плоскости, переводящие правильный треугольник с вершинами в кубических корнях из единицы в себя.

3. Рекуррентные последовательности. Мы рассмотрим только рекуррентные последовательности второго порядка, т. е. последовательности, у которых каждый член, начиная с третьего, выражается через два предшествующих. Для задания такой последовательности следует, очевидно, задать два ее первых члена и рекуррентную формулу

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n \quad (q \neq 0^1,\ n \geqslant 1). \tag{16}$$

Наша задача найти формулу n-го члена последовательности (u_n), иначе говоря, найти саму последовательность (u_n). Поскольку последовательность (u_n)—это функция натурального аргумента, то равенство (16) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции, т. е. как функциональное уравнение. Мы и будем решать это функциональное уравнение, учитывая начальные условия $u_1 = a$, $u_2 = b$.

В § 1 мы уже видели, что последовательность λ^n является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда λ является корнем квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Это уравнение называется *характеристическим уравнением последовательности* (u_n). Оно имеет два комплексных корня — либо два различных α и β, либо один корень α кратности 2.

Сначала мы рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет два различных корня. Тогда уравнение уже имеет два решения — это последовательности (α_n) и (β_n). Но это далеко не все: оказывается, что последовательность с общим членом

$$u_n = c\alpha^n + d\beta^n, \quad c, d \in \mathbf{C} \tag{17}$$

(*линейная комбинация* этих двух последовательностей) также является решением уравнения (16). В самом деле, поскольку

$$\alpha^{n+2} = p\alpha^{n+1} + q\alpha^n, \quad \beta^{n+2} = p\beta^{n+1} + q\beta^n,$$

[1] Условие $q \neq 0$ здесь наложено для того, чтобы (u_n) не оказалась последовательностью первого порядка.

то

$$u_{n+2}=c\alpha^{n+2}+d\beta^{n+2}=c(p\alpha^{n+1}+q\alpha^n)+d(p\beta^{n+1}+q\beta^n)=$$
$$=p(c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1})+q(c\alpha^n+d\beta^n)=pu_{n+1}+qu_n.$$

Таким образом, мы имеем целый набор последовательностей, удовлетворяющих уравнению (16), и в действительности всякое решение этого уравнения входит в этот набор — при соответствующем выборе постоянных c и d. Это утверждение фактически вытекает из последующих рассуждений.

А сейчас наша задача — постараться найти в этом наборе такую последовательность, которая удовлетворяет заданным начальным условиям: $u_1=a$, $u_2=b$. Эти равенства означают, очевидно, что

$$c\alpha+d\beta=a, \quad c\alpha^2+d\beta^2=b. \tag{18}$$

Нам достаточно убедиться, что эта система двух линейных уравнений с двумя неизвестными c и d имеет хотя бы одно решение. Но, вычитая из первого уравнения, умноженного на β, второе уравнение, мы получим:

$$c\alpha(\beta-\alpha)=a\beta-b.$$

Аналогично можно получить равенство

$$d\beta(\alpha-\beta)=a\alpha-b.$$

Так как $q=0$, то α и β оба отличны от 0, а поскольку $\alpha-\beta\neq 0$, то из полученных двух равенств будем иметь

$$c=\frac{a\beta-b}{\alpha(\beta-\alpha)}, \quad d=\frac{a\alpha-b}{\beta(\alpha-\beta)}. \tag{19}$$

Таким образом, последовательность (u_n), в которой

$$u_n=c\alpha^n+d\beta^n,$$

где c и d задаются равенствами (19), удовлетворяет уравнению (16) и начальным условиям (18). Следовательно, (u_n) — это и есть искомая последовательность.

Мы доказали фактически, что при любых начальных условиях можно подобрать постоянные c и d так, чтобы последовательность удовлетворяла этим начальным условиям. Но это и означает, что всякое решение уравнения (16) получается из формулы (17) при подходящем выборе постоянных c и d.

Рассмотрим для примера последовательность, приведенную в § 1. Зададим ее условиями:

$$u_{n+2}=-u_n, \qquad u_1=1, \qquad u_2=-1.$$

Характеристическое уравнение $x^2+1=0$ имеет корни i и $-i$, и тогда

$$u_n=ci^n+d(-i)^n,$$

где по формулам (19)

$$c=\frac{-i+1}{i(-2i)}=\frac{1-i}{2},\quad d=\frac{i+1}{-i\cdot 2i}=\frac{1+i}{2},$$

т. е.

$$u_n=\frac{1-i}{2}i^n+\frac{1+i}{2}(-i)^n. \tag{20}$$

Поскольку

$$i=e^{i\frac{\pi}{2}},\quad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\quad \frac{1-i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

то

$$u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

и мы получили, что число u_n — действительное. Из формулы (20) это совсем не очевидно.

Разумеется, и в общем случае, если начальные условия a и b — действительные числа и p и q также действительные числа, то формула (17) должна задавать действительное число u_n, даже если корни характеристического уравнения α и β — числа мнимые. Покажем, что это действительно так.

Вычислим сначала число, сопряженное c, пользуясь тем, что $\bar{a}=a$, $\bar{b}=b$, $\bar{\alpha}=\beta$, $\bar{\beta}=\alpha$:

$$\bar{c}=\frac{\overline{a\beta-b}}{\overline{\alpha(\beta-\alpha)}}=\frac{\bar{a}\,\bar{\beta}-\bar{b}}{\bar{\alpha}\,(\bar{\beta}-\bar{\alpha})}=\frac{a\alpha-b}{\beta\,(\alpha-\beta)}=d.$$

Но тогда

$$u_n=c\alpha^n+\bar{c}\bar{\alpha}^n=c\alpha^n+\overline{c\alpha^n}\in|\mathbf{R}$$

как сумма сопряженных чисел.

Для явного задания u_n как действительного числа положим, как и в только что рассмотренном примере,

$$c=re^{i\gamma},\quad \alpha=se^{i\varphi}.$$

Имеем: $\bar{c}=re^{-i\gamma}$, $\bar{\alpha}=se^{-i\varphi}$, откуда

$$u_n=rs^ne^{i(n\varphi+\gamma)}+rs^ne^{-i(n\varphi+\gamma)}=2rs^n\cos(n\varphi+\gamma).$$

И снова из степеней получились косинусы!

Случай, когда характеристическое уравнение $x^2-px-q=0$ имеет один корень $\alpha=-\frac{p}{2}$ кратности 2, с точки зрения комплексных чисел интереса не представляет, но для полноты изложения мы укажем, что в этом случае вместе с решением уравнению (16) удовлетворяет последовательность с общим членом $v_n=n\alpha^n$. Действительно,

$$v_{n+2}=(n+2)\alpha^{n+2}=n(p\alpha^{n+1}+q\alpha^n)+2\alpha^{n+2}=$$
$$=p(n+1)\alpha^{n+1}+qn\alpha^n+(2\alpha^{n+2}-p\alpha^{n+1})=$$
$$=pv_{n+1}+qv_n,$$

поскольку

$$2\alpha^{n+2}-p\alpha^{n+1}=2\alpha^{n+1}\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)=0.$$

Тогда мы, как и раньше, будем иметь набор решений:

$$u_n=c\alpha^n+dn\alpha^n=(c+dn)\alpha^n,$$

из которого при любых начальных условиях можно выбрать решения уравнения (16). На деталях рассуждений мы останавливаться не будем.

Отметим в заключение, что совершенно аналогичными рассуждениями решается данная задача и для рекуррентной последовательности любого порядка k, однако обоснование соответствующих утверждений, например доказательство существования постоянных, при которых из общего набора решений выделяется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, требует развитой теории систем линейных уравнений. Заметим еще, что часто рассматриваются последовательности, в которых рекуррентная формула имеет в правой части еще одно слагаемое:

$$u_{n+2}=pu_{n+1}+qu_n+r$$

(неоднородное уравнение). Способ решения такого рода уравнения, однако, уже не связан с нашей основной задачей — применением комплексных чисел, и мы на нем останавливаться не будем.

Упражнения

112. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — действительные числа. Пусть x_1 и x_2 — корни этого уравнения и $s_n=x_1^n+x_2^n$. Доказать, что $as_n+bs_{n-1}+cs_{n-2}=0$.

113. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения x^2-6x+1. Доказать, что при любом натуральном n $s_n=x_1^n+x_2^n$ — целое число, не делящееся на 5.

114. Найти формулу для n-го члена последовательности Фибоначчи: $u_1=1$, $u_2=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$.

115. При каких n числа Фибоначчи делятся на 5?

116. Найти общие решения рекуррентных уравнений:

а) $u_n-4u_{n-1}+3u_{n-2}=0$; б) $u_n-u_{n-1}+u_{n-2}=0$.

117. Доказать, что всякое решение рекуррентного уравнения $u_n+pu_{n-1}+qu_n=0$ при $p^2-4q=0$ имеет вид: $u_n=\lambda^{n-1}(c_1n+c_2)$, где λ — единственный корень характеристического уравнения $x^2+px+q=0$.

118. Найти все решения уравнения $u_n-6u_{n-1}+9u_{n-2}=0$.

119. Доказать, что любая арифметическая прогрессия a_n является решением рекуррентного уравнения $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$ и, наоборот, всякое решение этого уравнения является арифметической прогрессией.

120. Доказать, что всякое решение рекуррентного уравнения $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0$ имеет вид: $u_n=c_1n^2+c_2n+c_3$, где c_1, c_2, c_3 — действительные числа.

121. Иногда приходится решать такую задачу: найти последовательность w_n, удовлетворяющую уравнению $w_n+pw_{n-1}+qw_{n-2}=a_n$, где a_n — некоторая известная последовательность. Предположим, что нам удалось найти одно решение b_n этого рекуррентного уравнения. Доказать, что всякое решение w_n имеет вид: $w_n=b_n+u_n$, где u_n — решение однородного уравнения $u_n+pu_{n-1}+qu_{n-2}=0$.

4. Дифференциальные уравнения. Рассмотрим с помощью комплексных чисел последний вопрос из § 1 — решение *линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*. Напомним, что так называют уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ \ldots\ +a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_ny=g(x), \qquad (21)$$

в котором y — неизвестная функция, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ — ее последовательные производные, $g(x)$ — некоторая заданная функция, a_1, a_2, ..., a_n — постоянные числа. Теперь после введения комплексных чисел и знакомства с основами теории функций комплексного переменного мы имеем право считать, что коэффициенты уравнения (21) — комплексные числа, а y — функция комплексного переменного. Однако в первую очередь нас будут интересовать, разумеется, обычные «действительные» уравнения.

С дифференциальным уравнением, как правило, связаны две задачи: найти все решения и найти такое решение $y=f(x)$, которое удовлетворяет «начальным условиям», т. е. равенствам вида

$$f(x_0)=c_0,\ f'(x_0)=c_1,\ \ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1},$$

где c_0, c_1, ..., c_{n-1} — заданные числа.

Мы будем рассматривать только однородные уравнения (21), т. е. такие уравнения, в которых правая часть $g(x)=0$. Решение неоднородных уравнений (см. упражнение 126) сводится к подбору хотя бы одного его решения и решению соответствующего однородного уравнения. Подбор же решения неоднородного уравнения — задача, не имеющая отношения к рассматриваемым нами вопросам.

Для простоты рассуждений мы ограничимся рассмотрением уравнений второго порядка, т. е. случаем $n=2$.

Итак, пусть дано дифференциальное уравнение

$$y''+py'+qy=0, \qquad (22)$$

где p, q — комплексные числа.

Будем искать решение этого уравнения в виде $y=e^{\lambda z}$, где $\lambda\in\mathbf{C}$. Согласно формуле (23) из § 3 производная показательной функции e^z равна e^z, и можно показать, что производная сложной функции $e^{\lambda z}$ равна, как и в случае действительного переменного, $\lambda e^{\lambda z}$. Тогда $y''=(\lambda e^{\lambda z})'=\lambda^2 e^{\lambda z}$. Подставляя полученные выражения в уравнение (21), получим:

$$\lambda^2 e^{\lambda z}+p\lambda e^{\lambda z}+qe^{\lambda z}=0.$$

Но мы видели в § 3, что e^z не обращается в 0, и поэтому $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

Таким образом, функция $y=e^{\lambda z}$ является решением уравнения (22) тогда и только тогда, когда число λ является корнем уравнения

$$x^2+px+q=0. \tag{23}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (22).

Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня α и β, которые могут быть различными или совпадающими. Мы рассмотрим сначала случай, когда α и β различные.

Тогда уравнение (21) уже имеет два решения — это $y=e^{\alpha z}$ и $y=e^{\beta z}$; но тогда, как легко проверить, и всякая функция вида

$$y=ce^{\alpha z}+de^{\beta z} \tag{24}$$

также удовлетворяет уравнению (22), так что мы имеем бесконечное множество решений.

Выберем из этого множества решение y, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=a,\ y'(0)=b^1. \tag{25}$$

Поскольку $y'=\alpha ce^{\alpha z}+\beta de^{\beta z}$, то начальные условия (24) могут быть переписаны в виде

$$c+d=a,\quad \alpha c+\beta d=b,$$

откуда легко находятся постоянные c и d:

$$c=\frac{a\beta-b}{\beta-\alpha},\ d=\frac{b-a\alpha}{\beta-\alpha}. \tag{26}$$

Поэтому решение y уравнения (22), удовлетворяющее начальным условиям (24), представляется в виде

$$y=\frac{a\beta-b}{\beta-\alpha}e^{\alpha z}+\frac{b-a\alpha}{\beta-\alpha}e^{\beta z}. \tag{27}$$

Таким образом, в случае различных корней характеристического уравнения мы нашли решение уравнения, удовлетворяющее наперед заданным начальным условиям. В случае $\alpha=\beta$

[1] Мы считаем для простоты выкладок, что начальные условия заданы в точке $x_0=0$. С математической точки зрения это ограничение несущественно.

можно показать (см. упражнение 125), что решением уравнения (22) наряду с функцией $y=e^{\alpha x}$ будет функция $y=xe^{\alpha x}$, и тогда имеется бесконечное множество решений уравнения (22), имеющих вид

$$y=(c+dx)e^{\alpha x}. \tag{28}$$

В этом множестве также можно всегда найти решение, удовлетворяющее требуемым начальным условиям.

Теперь вернемся к главной задаче и рассмотрим случай, когда коэффициенты p и q уравнения (22) — действительные числа, в начальных условиях (24), a, $b\in\mathbf{R}$ и неизвестная функция y также является функцией действительного переменного. Покажем, что формула (27) в этом случае все равно дает решение задачи, хотя внешне в этой формуле при мнимых α и β фигурируют мнимые числа и показательные выражения с мнимыми показателями.

Для доказательства вычислим сначала число $\bar{c}$, сопряженное c, пользуясь тем, что α и β взаимно сопряжены как корни квадратного уравнения (23) с *действительными* коэффициентами. Имеем:

$$\bar{c}=\frac{\overline{a\beta-b}}{\overline{\beta-\alpha}}=\frac{\bar{a}\bar{\beta}-\bar{b}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}=\frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}=\frac{b-a\alpha}{\beta-\alpha}=d.$$

Заметим теперь, что для любого $z\in\mathbf{C}$ справедливо равенство $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$; действительно, если $z=x+iy$, то

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),$$

поэтому

$$\overline{e^z}=\overline{e^x}\,\overline{(\cos y+i\sin y)}=e^x(\cos(-y)+i\sin(-y))=e^{x-iy}=e^{\bar{z}}.$$

И если $z=x\in\mathbf{R}$, то из формулы (27)

$$\bar{y}=\bar{c}\,\overline{e^{\alpha x}}+\bar{d}\,\overline{e^{\beta x}}=de^{\bar{\alpha}x}+ce^{\bar{\beta}x}=$$
$$=de^{\bar{\alpha}x}+ce^{\bar{\beta}x}=de^{\beta x}+ce^{\alpha x}=y,$$

т. е. формула (27) и в самом деле задает функцию действительного переменного.

Лучше, однако, преобразовать эту формулу так, чтобы из нее было сразу видно, что функция y — действительная: если

$$c=re^{i\varphi},\quad \alpha=k+il,$$

то

$$\bar{c}=re^{-i\varphi},\quad \bar{\alpha}=k-il,\ \text{и}$$
$$y=re^{i\varphi}e^{(k+il)x}+re^{-i\varphi}e^{(k-il)x}=$$
$$=re^{kx}\left[e^{i(lx+\varphi)}+e^{-i(lx+\varphi)}\right]=$$
$$=2re^{kx}\cos(lx+\varphi).$$

Итак, дифференциальное уравнение (22) имеет следующее решение, удовлетворяющее начальным условиям (25):

$$y=2re^{kx}\cos(lx+\varphi). \qquad (29)$$

Участвующие в этой формуле постоянные r, k, l, φ не заданы в исходном уравнении (22), но могут быть, очевидно, вычислены, исходя из чисел p и q.

Формула (29) получена нами для случая, когда характеристическое уравнение (23) имеет различные мнимые корни, т. е. имеет отрицательный дискриминант. Случай, когда дискриминант положителен, т. е. корни α и β действительны и различны, описывается формулой (27) — она в этом случае не нуждается ни в каких дополнительных преобразованиях. Наконец, если дискриминант равен 0, т. е. $\alpha=\beta$, то, очевидно, $\alpha\in\mathbf{R}$, и искомое решение y представляется формулой (28), в которой постоянные c и d легко вычисляются из начальных условий (25), и тем самым для любого дифференциального уравнения вида (22) с действительными коэффициентами мы нашли решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Подчеркнем еще раз принципиальное значение проведенных рассуждений: в исходной постановке задачи участвуют только действительные числа, в окончательных формулах, задающих решения,— тоже только действительные числа, а комплексные числа использованы в процессе решения как вспомогательный аппарат — они «приходят и уходят».

Для иллюстрации рассмотрим дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y''=-\omega^2 y,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Характеристическое уравнение этого заданного уравнения есть $x^2+\omega^2=0$, и его корни $i\omega$ и $-i\omega$. Искомое решение представляется в виде

$$y=ce^{i\omega x}+de^{-i\omega x}.$$

Тогда $y'=ci\omega e^{i\omega x}-di\omega e^{-i\omega x}$, и из начальных условий при $x=0$ получаем систему

$$c+d=0,\quad i\omega(c-d)=1,$$

откуда $c=-\frac{1}{2\omega}i$, $d=\frac{1}{2\omega}i$, или

$$c=\frac{1}{2\omega}e^{-\frac{i\pi}{2}},\quad d=\frac{1}{2\omega}e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{1}{2\omega}\left[e^{i\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]=$$
$$=\frac{1}{\omega}\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\omega}\sin\omega x.$$

Сделаем еще несколько дополнительных замечаний. Мы остановились только на решении второй из задач — на нахождении решений, удовлетворяющих данным начальным условиям. Эта задача, однако, не решена нами полностью: мы нашли только одно требуемое решение, и остается еще возможность существования других решений, которые могут быть получены каким-либо иным способом.

В аналогичной ситуации, когда мы рассматривали в пункте 3 рекуррентные последовательности, единственность решения была гарантирована: если две последовательности, задаваемые рекуррентной формулой второго порядка, имеют совпадающие первые два члена, то и остальные члены последовательностей также совпадают. В то же время если две функции удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (22) и одним и тем же начальным условиям, то неясно, почему значения этих функций должны совпадать и во всех остальных точках x.

Тем не менее в действительности эти функции все-таки должны совпадать; вытекает этот факт из специальной *теоремы единственности*, доказываемой в общей теории дифференциальных уравнений. В этой общей теории доказывается, кроме того, что формулы (24) и (28) задают *общее решение* уравнения (22), т. е. всякое решение этого уравнения получается из этих формул при соответствующем выборе постоянных c и d.

Упражнения

122. Решить дифференциальные уравнения (найти общие решения):

а) $y''+3y'+2=0$; б) $y''+y'+1=0$.

123. Как известно из курса физики, сила тока $i(t)$, протекающего через колебательный контур, изображенный на рисунке 24, удовлетворяет дифференциальному уравнению $Li''+Ri'+\frac{i}{c}=0$.

Решить это уравнение при начальных условиях: $i(0)=0$, $i'(0)=E$, соответствующих мгновенному замыканию ключа K. Исследуйте решения в зависимости от L, C и R.

124. Доказать, что функция $xe^{-\frac{p}{2}x}$ является решением дифференциального уравнения $y''+py'+qy=0$ при условии равен-

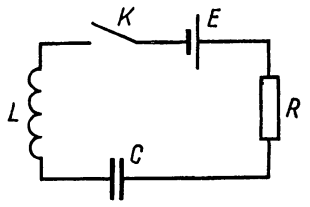

Рис. 24

ства $p^2-4q=0$. Найти общее решение этого уравнения.

125. Доказать, что всякое решение уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, где $f(x)$ — некоторая функция, можно представить в виде $y(x)=a(x)+u(x)$, где $a(x)$ — одно из решений этого уравнения, а $u(x)$ — решение однородного уравнения $u''+pu'+qu=0$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. $2x^4+x^3+x^2-x$. **2.** а) 1 и 1; б) 2^{100} и 1; в) 1 и 2^n. **3.** Проверяется непосредственно. **4.** $a=11$; $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **5.** $a=-12$, $b=6$. **6.** а) $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, ..., $-x_n$; б) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$; в) $-\frac{1}{x_1}, -\frac{1}{x_2}, \ldots, -\frac{1}{x_n}$; г) $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}$. **7.** Многочлен условия задачи — нечетная функция. **8.** Если $p(-x)=-p(x)$, то $-a_k=(-1)^k a_k$, откуда и следует утверждение задачи. **9.** а) $\frac{1+3^{100}}{2}$; б) $\frac{1-3^{100}}{2}$. **10.** б) Частное $2x^2+3x+13$, остаток $34x+6$; в) частное $\frac{1}{3}$, остаток $-\frac{1}{3}x^2+x-\frac{1}{3}$. **11.** $ar(x)$. **12.** $m=1$, $p=0$. **13.** $a=3$, $b=-4$. **14.** $x_1=x_2=1$, $x_3=-2$. **15.** Воспользоваться тем, что $3^{60}+1=81^{15}+1$. **16.** $5x-5$. **17.** $2x+1$. **18.** $a=-2$, $b=0$. **19.** Рассуждения аналогичны примеру 4 на с. 76. **20.** Пусть $z=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}}$, тогда $z^3-z-2=0$. Это уравнение имеет единственный действительный корень $z=1$, откуда и следует утверждение задачи. **21.** Положим $y=x^n$ и рассмотрим многочлен $f(y)$. Из условия задачи следует, что $f(1)=0$, и поэтому $f(y)=(y-1)g(y)$, следовательно, $f(x^n)=(x^n-1)g(x^n)$. **22.** 3. **23.** $a=-1$. **24.** Пусть x_0 — корень кратности k многочлена $f(x)$, тогда $f(x)=(x-x_0)^k h(x)$, где $h(x_0)\neq 0$. Дифференцируя, получим $f'(x)=k(x-x_0)^{k-1}h(x)+(x-x_0)^k h'(x)=(x-x_0)^{k-1}g(x)$, при этом $g(x_0)=kh(x_0)+(x-x_0)h'(x_0)=kh(x_0)\neq 0$, что и требовалось. **25.** Все многочлены вида $a(x-x_0)^n$; для доказательства воспользуйтесь методом математической индукции. **26.** $\left(\frac{b}{5}\right)^5=-\left(\frac{a}{4}\right)^4$. **27.** $a=-\frac{10}{3}$, $b=5$, $c=\frac{8}{3}$, **28.** Пусть $g(x)=a(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Так как $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — корни $f(x)$, то $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)h(x)=g(x)h(x)$. **29.** Равенство справедливо при всех действительных x. **30.** а) $x=2$; б) рациональных корней нет. **31.** Докажите, что $f(m)$ — нечетное число при любом целом m. **32.** Сначала докажите, что уравнение $t^4-3t^3-1=0$ не имеет рациональных корней. **33.** Если $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, то $q^n f(1)=q^n\left(f(1)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right)=(p-q)C$, где C — целое число. Аналогично $q^n f(-1)=q^n\left(f(-1)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right)=(p+q)B$, где B — целое число. **34.** Не существует. **35.** Докажите, что $f(5)=f(2)+f(3)+M$, где M — целое число, делящееся на 6. **36.** а) $5+i$; б) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$; в) $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}i$; г) -2^{990};

д) 1; е) $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$; ж) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; з) $-\frac{1+i}{2}$.

37. а) $x=\frac{8}{3}$; $y=-\frac{1}{3}$; б) $x=\frac{1}{7}$, $y=\frac{3}{7}$. 38. а) $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$; б) Пусть $z=x+iy$. Из равенства $z^2=i$ получим $x^2-y^2=0$, $2xy=1$. Решая систему, находим x и y. Окончательно $z_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; в) $z_{1,2}=\pm(2+i)$; г) $z_{1,2}=i(1\pm\sqrt{2})$. 40. На прямой $x+y=1$. 41. Прямая $y=-x$. 42. $\frac{z+w}{2}$.

43. $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$. 44. Таких точек три: $z=z_1+z_2-z_3$, $z=z_1+z_3-z_2$, $z=z_2+z_3-z_1$. 45. а) Внутренние точки кольца с центром в точке (1, 0), внутренний радиус которого равен 1, внешний радиус 2; б) полуплоскость $y>\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$; в) окружность радиуса 2 с центром в точке (0, 5; 0, 5); е) прямая $y=1-2x$; ж) прямая $y=2$; к) прямая $y=1-x$; о) луч $y\sqrt{3}+x+\sqrt{3}=0$, $y<-1$; р) окружность радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке $\frac{-1+i}{2}$.

46. Воспользуйтесь коллинеарностью векторов z_3-z_1 и z_2-z_1. 47. а) $\cos 0+i\sin 0$; б) $\cos\pi+i\sin\pi$; в) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; г) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; д) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; е) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; ж) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; з) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; и) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; к) $5(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$; л[1]) $5(\cos(2\pi-\varphi)+i\sin(2\pi-\varphi))$; м) $5(\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi))$, н) $5(\cos(\pi+\varphi)+i\sin(\pi+\varphi))$; о) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}-\alpha\right)$; п) $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ при $\cos\alpha>0$, т. е. при $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $-\frac{1}{-\cos\alpha}(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$ при $\cos\alpha<0$, т. е. при $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

48. а) 2^6; б) $2(1-i)$; в) $-\sin 3\alpha-i\cos 3\alpha$; г) $\frac{\sin(\alpha-\beta)+i\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$.

49. а) $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; б) $\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha$. 50. $\frac{2}{3}(1-2i)$. 51. При n, делящемся на 4. 52. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $3-4i$. 53. $32\,045=5\cdot13\cdot17\cdot29=|(2+i)(3+2i)(4+i)(5+2i)|^2=|-19+178i|^2=19^2+178^2=173^2+46^2$. 54. а) Точки z_1 и z_2 принадлежат лучу с началом в точке O; б) точки z_1, z_2 и O лежат на одной прямой, причем O находится между точками z_1 и z_2, кроме того, $|z_1|\geqslant|z_2|$; в) угол z_1Oz_2 — прямой. 55. Воспользуйтесь равенством $|z|^2=z\cdot\bar{z}$. 56. Пусть O, z_1, z_2, z_3 — последовательные вершины данного четырехугольника. По условию $|z_1|^2+$

[1] В пунктах л), м), н) $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$.

$+|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3|^2=|z_2|^2+|z_1-z_3|^2$. Преобразуя это соотношение с использованием формулы $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, получим $(\bar{z}_1-\bar{z}_2+\bar{z}_3)(z_1-z_2+z_3)=0$, т. е. $z_2=z_1+z_3$, а это и значит, что данный четырехугольник — параллелограмм.

57. а) Окружность $|z|=1$; б), в) пустое множество; г) окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$; д) прямая $y=0$; е) полуплоскость $x<\frac{1}{2}$; ж) луч $\arg z=\frac{7\pi}{4}$. **58.** а) -2^{990}; б) $2^{19}(-1+i\sqrt{3})$; в) -1; г) $\frac{i}{\cos^{90}1^\circ}$. **59.** а) $\frac{1}{\cos^n\alpha}\left(\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$; б) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$; в) $2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{4}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$. **60.** $2\cos\frac{n\pi}{3}$. **61.** Воспользоваться формулами бинома и Муавра. **62.** Предположим, что $\sin 1^\circ=\frac{p}{q}$, где p и $q>0$ — целые числа. Тогда по предыдущей задаче $\sin 45^\circ=\sin 45\cdot 1^\circ$ можно было бы представить в виде многочлена с целыми коэффициентами от $\sin 1^\circ$, т. е. число $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ оказалось бы рациональным. Аналогично доказывается и иррациональность $\cos 1^\circ$. **63.** а) $\frac{a^{n+1}\sin nx+a^n\sin(n+1)x-\sin x}{a^2-2a\cos x+1}$; б) $\frac{a^{n+1}\cos nx+a^n\cos(n+1)x-a-\cos x}{a^2-2a\cos x+1}$; в) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$. **64.** $\operatorname{tg}5\alpha=$ $=\frac{5\operatorname{tg}\alpha-10\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^5\alpha}{1-10\operatorname{tg}^2\alpha+5\operatorname{tg}^4\alpha}$. **65.** а) Шесть углов с вершиной в точке O, величиной $\frac{\pi}{6}$ и биссектрисами $\arg z=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$; б) область $|xy|\leqslant 1$. **66.** а) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; б) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+$ $+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$; д) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, $k=0, 1, 2$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+$ $+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$; ж) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)+$ $+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$; з) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right)$, $k=0, 1, 2, 3$; и) $\sqrt[5]{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$. **67.** Если $\alpha^k=1$ и $n=km$, то $\alpha^n=$ $=(\alpha^k)^m=1$. **68.** Если предположить, что n не делится на k, то $n=kl+r$, где $0<r<k$. Тогда для всякого корня α степени k из единицы будет

$\alpha^{kl+r}=\alpha^r=1$, но это невозможно. **69.** Докажите сначала, что при взаимно-простых r и s из равенств $\alpha^r=1$ и $\alpha^s=1$ вытекает, что $\alpha=1$. Если d — Н.О.Д. чисел m и n, то $(\alpha^d)^{\frac{m}{d}}=1$ и $(\alpha^d)^{\frac{n}{d}}=1$, а так как $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$ взаимно-простые, то $\alpha^d=1$. **71.** Из условия легко получить, что все числа 1, α, α^2, ..., α^{n-1} различны, а так как все они являются корнями степени n из единицы, то каждый из корней встречается среди этих чисел. **72.** а) i и $-i$; б) $\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}$, $k=1, 3, 5, 7$; в) $\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k=1,5$; г) $\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}$, $k=1, 5, 7, 11$; д) $\cos\frac{k\pi}{12}+i\sin\frac{k\pi}{12}$, $k=1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$. **73.** Первообразными являются все корни вида $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, где k — взаимно-простое с n, и только они. **74.** а) $x_1=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, $x_2=\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$, $x_3=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{8}$, $x_4=\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$; б) $z_1=0$, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 — корни 5-й степени из 1; в) $z_1=0$, z_2, z_3, z_4, z_5 — корни 4-й степени из -1; г) $x_k=\operatorname{tg}\frac{\alpha+k\pi}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. **75.** а) $z_1=w_1=i$; $z_2=w_2=-i$; б) $z_1=1$; $w_1=-1$; $z_2=-1$, $w_2=1$. **76.** Сумма равна нулю, если k не делится на n, и единице, если делится. Воспользуйтесь результатом задачи 71. **77.** а) $x^{2k}-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{k}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(k-1)\pi}{k}+1\right)$; б) $x^{2k}+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2k}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{2k}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2k}+1\right)$; в) $x^{2k+1}+1=(x+1)\left(x^2+2x\cos\frac{2\pi}{2n+1}+1\right)\ldots\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2k+1}+1\right)$. **78.** Достаточно доказать это утверждение для треугольника с вершинами в корнях третьей степени из единицы: 1, α, α^2. Пусть точка z лежит на дуге единичной окружности между точками 1 и α. Нужно доказать, что $|z-\alpha|+|z-1|=|z-\alpha^2|$. Заметим, что векторы $\alpha z-\alpha^2$ и $z-1$ одинаково направлены, и преобразуем левую часть равенства: $|z-\alpha|+|z-1|=|\alpha z-\alpha^2|+|z-1|=|\alpha z-\alpha^2+z-1|=|z(\alpha+1)-\alpha^2-1|=|-\alpha^2 z+\alpha|=|\alpha^2 z-\alpha|=|z-\alpha^2|$, что и требовалось (мы воспользовались равенствами $\alpha^3=1$ и $\alpha^2+\alpha+1=0$). **79.** а) $-e$; б) $e^2(\cos 1+i\sin 1)$; в) $2k\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$; г) $(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$; д) $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)i$, $k\in\mathbf{Z}$; е) $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$, $k\in\mathbf{Z}$; **80.** а) Окружность $|z|=1$; б) окружность $|z|=e^a$; в) луч $\arg z=\frac{\pi}{4}$; г) луч $\arg z=\alpha$. **81.** Докажем, например, формулу для синуса двойного угла. Имеем: $\sin 2z=\frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}=2\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2\sin z\cos z$. **82.** а) $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $z=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; в) корней нет; г) $z=i\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **83.** а) Либо $\operatorname{Im} z=0$, либо $\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Пусть $z=x+iy$, тогда $\sin z=$

$= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\sin x + \frac{i}{2}\cos x(e^y - e^{-y})$, и, приравнивая к нулю мнимую часть, получим ответ; б) либо $\operatorname{Im} z = 0$, либо $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **84.** а) $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $ie^{-\pi+4k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$. **85.** а) $(x-i-1)(x-1+i)(x+1-i)(x+i+1)$; б) $(x-2i)(x+2i)(x-\varepsilon_1)\times$ $\times(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)(x-\varepsilon_5)(x-\varepsilon_6)$; $\varepsilon_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)\right)$; в) $x^{12}+x^6+1 = \left(x^6 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^6 - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, затем каждый из множителей раскладывается на 6 линейных сомножителей. **86.** а) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$; б) $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$; в) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; г) $(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$. **87.** $p_1 = -i$; $q_1 = -1$; $p_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$; $q_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; $p_3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $q_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. **88.** При $a=0$ и $m = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$, при $a=2$ и $m = 4k+2$, $k \in \mathbf{Z}$, а также при $a=-2$ и $m = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$. **89.** При $m \not\equiv 3k$, $k \in \mathbf{Z}$. **90.** При m, делящемся на n. **91.** Воспользуйтесь тем, что $x^{26}+x+1$ делится на x^2+x+1. **92.** $\lambda = \pm 6$. **93.** $\lambda = 6$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$. **94.** Воспользуйтесь разложением: $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1 = (x+1)\times$ $\times(x-1)^3(x^2+x+1)$. **95.** (1, 3, 5), (1, 5, 3), (5, 3, 1), (5, 1, 3); (3; 5; 1); (3, 1, 5). **96.** Свободный член любого многочлена — делителя $x^{105}-9$ — является произведением некоторого количества корней степени 105 из 9 и поэтому не может быть целым числом, если степень делителя меньше 105. **97.** Решается аналогично примеру 4 этого параграфа. **98.** Прямая $y = 1-3x$. **99.** а) Круг $|z| \leqslant 1$; б) круг $|z-2i| \leqslant 3$; в) круг $|z+4-i| \leqslant 2$. **100.** Повороты на угол $\frac{5\pi}{6}$: $z \longrightarrow \frac{-\sqrt{3}+i}{2}z + \frac{(1+\sqrt{3})(i\sqrt{3}+1)}{2}$ и $z \longrightarrow \frac{-\sqrt{3}+i}{2}z + 1+i$. **101.** Ось симметрии $y = (\sqrt{2}-1)x$. **102.** а) Поворот на 90° вокруг точки $\frac{3-\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{4}$; б) поворот вокруг точки $2(1+i)$ на 90°; в) поворот на угол $\alpha+\beta$ вокруг некоторой точки при $\alpha+\beta \not\equiv 2\pi$ и параллельный перенос при $\alpha+\beta = 2\pi$; г) $z \longrightarrow \frac{4+3i}{5}z + 3-i$, это поворот на угол $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ вокруг точки $3+4i$; д) поворот на 90° вокруг точки $z=0$. **103.** Поворот, либо параллельный перенос. **104.** а) $z \longrightarrow i\bar{z}+i-1$; б) $z \longrightarrow -i\bar{z}+2$; в) $z \longrightarrow \bar{z}+3i+1$. **105.** $z \longrightarrow az+b$, где $|a|=1$, $-a\bar{b}i + 2a + b = 2i$. **106.** Пусть $a_0 = \frac{a}{|a|}$. Тогда $az+b = a_0\left(|a|z - \frac{b}{1-a_0}\right) + \frac{b}{1-a_0}$, откуда видно, что преобразование есть композиция гомотетии с центром $z=0$ и коэффициентом $|a|$ и поворота на угол $\arg a$ вокруг точки $z = \frac{b}{1-a_0}$. «Чистая» гомотетия получится при действительных a. **107.** Пусть $\alpha = \arg a$. В себя переходят прямые $y = x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и перпендикулярная ей прямая $y = -x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **108.** Пусть $a_0 = \frac{a}{|a|}$. Тогда $a\bar{z}+b = |a|\left(a_0\bar{z} - \frac{b}{1-|a|}\right) + \frac{b}{1-|a|}$, откуда видно, что данное преобразование есть композиция сим-

метрии относительно прямой $y=x\operatorname{tg}\frac{\arg a}{2}$ и гомотетии $\mathbf{H}_{\frac{a}{b}}^{\frac{a}{1-|a|}}$ 109. а) Преобразования вида $z\longrightarrow az+(1-a)(1+i)$; $|a|=1$, т. е. повороты вокруг точки $z=1+i$; б) $z\longrightarrow z+k(1+i)$ и $z\longrightarrow i\bar{z}+(k-1)+ik$, где k — действительное число. 110. Таких преобразований нет. 111. Всего 6 перемещений. 112. Так как $ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}=0$ и $ax_2^n+bx_2^{n-1}+cx_2^{n-2}=0$, то и $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$. 113. Воспользуйтесь соотношением $S_n-6S_{n-1}+S_{n-2}=0$ и методом индукции. 114. $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. 115. При n, кратном 5. 116. а) $u_n=c_1+c_2 3^n$; б) $u_n=c_1\cos\frac{n\pi}{3}+c_2\sin\frac{n\pi}{3}$. 117. Легко проверить, что $n2^{n-1}$ — решение. Если даны u_1 и u_2, то c_1 и c_2 легко находятся. 118. $u_n=3^n(c_1n+c_2)$. 119. a_n — арифметическая прогрессия тогда и только тогда, когда $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}$ при $n>2$, что равносильно соотношению $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$. 120. Решение аналогично задаче 116. 121. Если $w_n+pw_{n-1}+qw_{n-2}=a_n$ и $v_n+pv_{n-1}+qv_{n-2}=a_n$, то последовательность $u_n=w_n-v_n$ удовлетворяет уравнению $u_n+pu_{n-1}+qu_{n-2}=0$. 122. а) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$; б) $y=\left(c_1\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}+c_2\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$. 123. Пусть λ_1, λ_2 — корни уравнения $CL\lambda^2+RC\lambda+1=0$. Если $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $i(t)=\frac{E}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)$. Если $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $i(t)=Ete^{-\frac{R}{2L}t}$. Если $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $i(t)=\frac{E}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\cdot\sin t\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$. 124. Общее решение имеет вид: $y(x)=e^{-\frac{px}{2}}(c_1x+c_2)$. 125. Решается аналогично задаче 121.

ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Широко известно, что евклидова геометрия является одной из наиболее древних наук: уже в III в. до н. э. появился классический труд Евклида — «Начала». Менее известно, что сферическая геометрия лишь немного моложе. Ее первое систематическое изложение относится к I—II вв. В книге «Сферика», написанной греческим математиком Менелаем (I в.), изучались свойства сферических треугольников; доказывалось, в частности, что сумма углов сферического треугольника больше 180°. Большой шаг вперед сделал другой греческий математик Клавдий Птолемей (II в.). По существу он первый составил таблицы тригонометрических функций, ввел стереографическую проекцию.

Так же как и геометрия Евклида, сферическая геометрия возникла при решении задач практического характера, и в первую очередь задач астрономии. Эти задачи были необходимы, например, путешественникам и мореплавателям, которые ориентировались по звездам. А поскольку при астрономических наблюдениях удобно считать, что и Солнце, и Луна, и звезды движутся по воображаемой «небесной сфере», то естественно, что для изучения их движения потребовались знания о геометрии сферы. Не случайно поэтому, что самая известная работа Птолемея называлась «Великое математическое построение астрономии в 13 книгах».

Сферическая геометрия быстро нашла применения и при решении сугубо земных задач. Довольно давно появилась гипотеза о том, что Земля имеет форму шара (радиус Земли с довольно большой степенью точности уже в III в. до н. э. вычислил Эратосфен). Поэтому для вычисления географических координат, для нахождения курса корабля, для составления географических карт тоже потребовались сведения о сфере.

Однако, чтобы найти основные теоремы и формулы сферической геометрии, понадобилось существенно больше времени, чем для решения задач евклидовой геометрии. Сферическая геометрия последовательно развивалась благодаря работам индийских (Ариабхата, V в.) и арабских ученых (Аль-Баттани — IX в.; Абу-Аль Вефа — XI в.), азербайджанского математика Насирэддина Туси (XIII в.). Достраивали здание сферической геометрии европейские математики Регномонтан, Непер, Мерка-

тор и другие. Особую роль здесь сыграли работы Леонарда Эйлера[1]. Благодаря Эйлеру сферическая геометрия приобрела современный вид.

В настоящее время сферическая геометрия особенно широкое применение находит в астрономии и геодезии (науке о форме и размерах Земли), навигации и картографии.

Так же как и в планиметрии, в сферической геометрии рассматриваются точки и «прямые» (кратчайшие на сфере), расстояния между точками, перемещения. После введения этих понятий мы увидим, что между планиметрией и сферической геометрией много общего, однако имеются и важные различия. Мы познакомимся также с простейшими приложениями сферической геометрии.

§ 1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Напомним, что *сферой радиуса* $R>0$ *с центром в точке* O называется множество точек пространства, удаленных от точки O на расстояние R. Сферу с центром O радиуса R будем обозначать Сф (O, R). По определению

$$\text{Сф } (O, R)=\{M \mid |OM|=R\}.$$

Первый вопрос, который мы обсудим, таков: как вдоль сферы измерить кратчайшее расстояние между двумя ее точками A и B? Иными словами, какова кратчайшая линия на сфере, соединяющая точки A и B?

Простейшие линии на сфере — это окружности (рис. 1), по которым сфера пересекается со всевозможными плоскостями (см. «Геометрия, 10», § 63). Плоскостям, проходящим через центр сферы, отвечают окружности на сфере, имеющие наибольший возможный радиус, равный радиусу сферы R; они называются *большими окружностями*.

Если точки A и B сферы (O, R) не диаметрально противоположны, т. е. не являются концами одного диаметра, то через A и B можно провести единственную большую окружность, которую мы обозначим (AB) — она получится в пересечении сферы с однозначно определенной плоскостью AOB. Пусть $[AB]$ — меньшая из дуг окружности (AB), соединяющей точки A и B. Если рассмотреть дугу любой другой окружности, проходящей через точки A и B (например, дугу γ — рис. 2, a), то оказывается, длина γ будет больше длины $[AB]$. Чтобы сравнить эти длины, можно поворотом вокруг прямой AB совместить плос-

[1] Леонард Эйлер (1707—1783) — крупнейший математик, швейцарец по происхождению. Он известен своими достижениями практически во всех областях математики. В течение долгого времени, вплоть до своей смерти, Эйлер работал в России, в Санкт-Петербургской академии наук. Далее вы познакомитесь с двумя теоремами, носящими его имя.

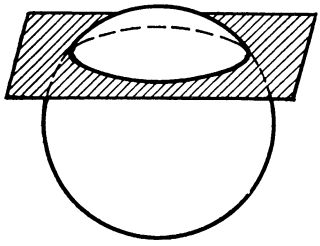

Рис. 1

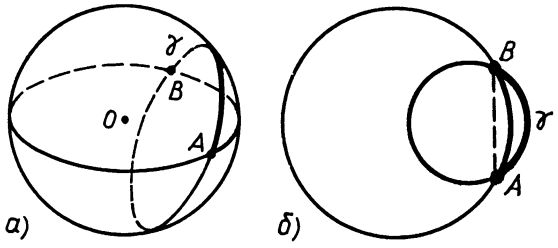

Рис. 2

кость дуги γ с плоскостью большой окружности (AB), тогда γ будет содержать дугу $[AB]$ внутри себя (рис. 2, *б*); как нетрудно понять, отсюда и следует, что длина γ больше длины $[AB]$ (см. задачу 5, а).

Итак, расстояние между двумя точками при измерении вдоль дуги большого круга меньше, чем при измерении вдоль дуги любой другой окружности. Поэтому естественно определить расстояние на сфере следующим образом.

Определение. *Сферическим расстоянием между двумя точками сферы называется длина кратчайшей из дуг большой окружности, проведенной через эти точки.*

(В случае, когда точки A и B диаметрально противоположны, через них можно провести бесконечно много больших окружностей, но все они будут иметь одинаковую длину, равную πR.)

Сферическое расстояние между точками A и B будем обозначать через $|AB|_s$. Нетрудно видеть, что это расстояние можно вычислить по формуле

$$|AB|_s = R \cdot \overset{\frown}{AOB}, \qquad (1)$$

где $\overset{\frown}{AOB}$ — радианная мера угла AOB.

Напомним, что расстояние на плоскости и в пространстве — понятие неопределяемое, но удовлетворяющее трем условиям — аксиомам расстояния:

(I) $|AB| \geqslant 0$, причем $|AB| = 0$ в том и только в том случае, когда $A = B$;

(II) для любых точек A и B

$$|AB| = |BA|;$$

(III) для любых точек A, B и C

$$|AC| \leqslant |AB| + |BC|$$

(это неравенство называют неравенством треугольника).

В сферической геометрии мы определили понятие расстояния, поэтому нужно проверить выполнение важных свойств (I)—(III).

Теорема 1. ***Для сферического расстояния выполнены аксиомы расстояния I—III.***

Доказательство. Справедливость аксиом I и II для сферического расстояния очевидна. Используя формулу (1), перепишем неравенство треугольника $|AC|_s \leqslant |AB|_s + |BC|_s$ в виде

$$R \cdot \overset{\frown}{AOC} \leqslant R \cdot \overset{\frown}{AOB} + R \cdot \overset{\frown}{BOC}.$$

Рассматривая соответствующий чертеж (рис. 3), мы видим, что в случае, когда точки A, B и C не принадлежат одной большой окружности, неравенство треугольника на сфере отвечает известному свойству плоских углов при вершине O трехгранного угла $OABC$ («Геометрия, 9», § 41). Тот случай, когда точки A, B и C принадлежат одной большой окружности, рассмотрите самостоятельно.

Кратчайшую из двух дуг большой окружности (AB), проходящей через две не диаметрально противоположные точки A и B сферы, естественно назвать отрезком AB на сфере, а саму большую окружность AB — прямой на сфере. (Аналогию с планиметрией, которая делает эти определения естественными, мы рассмотрим в следующем параграфе.)

Доказывая теорему 1, мы натолкнулись на замечательное соответствие между трехгранным углом $OABC$ с вершиной в центре сферы и сферическим треугольником ABC — частью сферы, ограниченной отрезками AB, BC и CA. Его можно положить в основу определения сферического многоугольника: выпуклым *сферическим n-угольником* будем называть пересечение сферы с выпуклым n-гранным углом с вершиной в центре сферы (рис. 4). Наконец, проводя из данной точки $A \in \text{Сф}(O, R)$ «лучи» AB и AC на сфере (рис. 5), мы видим, что они, «разойдясь», снова «сходятся» — пересекаются и в диаметрально противоположной точке A'. Часть сферы, заключенная между дугами ABA' и ACA', — это сферический аналог угла на плоскости, *двуугольник* AA'. Как и выше, двуугольник можно определить как пересечение сферы и двугранного угла с ребром AA' и гранями $AA'B$ и $AA'C$.

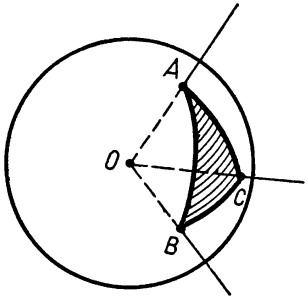

Рис. 3

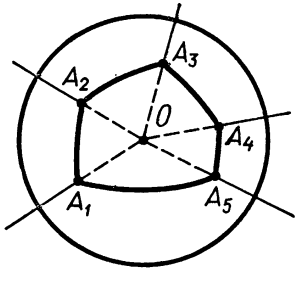

Рис. 4

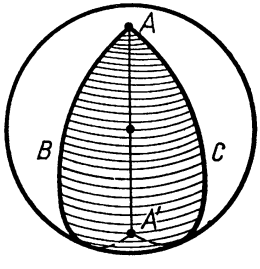

Рис. 5

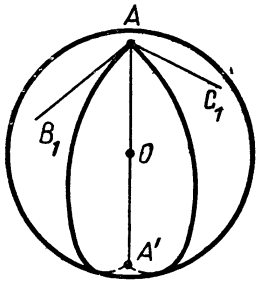

Рис. 6

Конечно, как и на плоскости, длиной отрезка AB на сфере назовем расстояние $|AB|_s$ между его концами.

Определение. *Величиной угла BAC между отрезками AB и AC на сфере называется величина угла между касательными к большим окружностям AB и AC, проведенными в точке A.*

Поскольку касательные AB_1 и AC_1 перпендикулярны радиусу OA, то угол B_1AC_1 является линейным углом двугранного угла, отвечающего двуугольнику AA' (рис. 6). Таким образом, величина сферического угла A равна величине двугранного угла при ребре AA'. Далее, как обычно, мы будем вместо слов «величина угла» часто употреблять просто слово «угол».

Итак, мы ввели понятия прямой, расстояния, отрезка, угла и n-угольника ($n\geqslant 2$) на сфере. Непосредственно из определений вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 2. ***Если $A_1A_2...A_n$ — сферический n-угольник, получающийся в пересечении многогранного угла $OA_1A_2...A_n$ со сферой (O,R), то длины сторон этого n-угольника пропорциональны величинам плоских углов многогранного угла: $|A_kA_{k+1}|_s=R\cdot\angle A_kOA_{k+1}$, а углы сферического многоугольника соответственно равны двугранным углам многогранного угла.***

Это соответствие между сферическими многоугольниками и многогранными углами поможет нам в дальнейшем (см. § 3).

Упражнения

1. Докажите, что две несовпадающие сферы либо не имеют общих точек, либо пересекаются по одной точке или по окружности.

2. Перечислите все возможные множества, которые могут получиться в пересечении трех сфер.

3. Докажите, что:

а) $|AB|_s=|CD|_s$ тогда и только тогда, когда $|AB|=|CD|$;

б) $|AB|_s<|CD|_s$ тогда и только тогда, когда $|AB|<|CD|$.

4. а) Пусть $[AB]$ — отрезок на сфере, $AC_1C_2...C_nB$ — ломаная, составленная из сферических отрезков. Докажите, что длина отрезка AB не превосходит длины этой ломаной.

б) Верно ли предыдущее утверждение, если вместо отрезка AB взять произвольную дугу большой окружности?

5. а) Пусть выпуклый многоугольник на плоскости содержится внутри второго (необязательно выпуклого) многоугольника. Докажите, что периметр первого многоугольника меньше, чем периметр второго.

б) Верно ли предыдущее утверждение, если не требовать, чтобы первый многоугольник был выпуклым?

в) Верно ли утверждение 5, а) для двух выпуклых сферических многоугольников?

6. Верно ли, что сумма углов сферического треугольника всегда равна 180°?

§ 2. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ И ПЛАНИМЕТРИЕЙ

В предыдущем пункте были введены, т. е. определены, важнейшие понятия сферической геометрии — понятия сферического расстояния между двумя точками сферы и сферической прямой — большой окружности на сфере. Было показано, что для сферического расстояния выполнены обычные аксиомы расстояния (теорема 1). Напомним, что в планиметрии понятие прямой не определяется — это первичное понятие геометрии плоскости. Требуется, однако, чтобы для прямых на плоскости выполнялись некоторые аксиомы; полный список аксиом планиметрии приведен в учебнике «Геометрия, 8» (п. 130—135). Выясним, какие из этих аксиом будут справедливы в сферической геометрии — для сферических прямых.

Конечно, аксиома, гласящая, что каждая прямая есть множество точек, в сферической геометрии выполняется — большие окружности суть множества точек. Однако уже со следующей аксиомой: для любых двух точек A и B существует единственная содержащая эти точки прямая — дело обстоит сложнее. Если точки A и B сферы не являются диаметрально противоположными, то это предложение верно (объясните почему), но для диаметрально противоположных точек A и B существует бесконечно много сферических прямых, содержащих эти точки: пересечение сферы с любой плоскостью, содержащей диаметр AB, даст такую прямую. Можно сказать, что эта аксиома «почти» выполняется на сфере. Оговорка «почти» приводит к замечательным следствиям.

Теорема 3. ***Любые две различные прямые на сфере*** (т. е. большие окружности) ***пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы.***

Доказательство. Если α и β — плоскости двух различных больших окружностей на сфере (O, R), то $O \in \alpha$ и $O \in \beta$, поэтому α и β пересекаются по некоторой прямой l, проходящей через центр сферы. Прямая l пересекается со сферой в двух диаметрально противоположных точках, которые и будут общими точками рассматриваемых больших окружностей.

Из этой теоремы вытекает, что в сферической геометрии нет содержательного понятия параллельности — нет различных параллельных прямых. Разумеется, не выполняется и аксиома

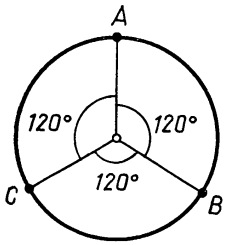

Рис. 7

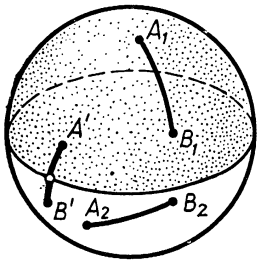

Рис. 8

параллельных, а следовательно, не имеет смысла говорить и о параллельных переносах.

В планиметрии одна из трех различных точек, принадлежащих одной прямой, лежит между двумя другими (если, скажем, точка B лежит между A и C, то это означает, что $|AB|+|BC|=|AC|$, тогда B принадлежит отрезку AC). В сферической геометрии такое понятие «лежать между» определить нельзя, например, если точки A, B и C лежат на большой окружности и разделены дугами градусной меры 120° (рис. 7), то ни про одну из них нельзя сказать, что она лежит между двумя другими (объясните). Грубо говоря, это объясняется тем, что в планиметрии точка разбивает прямую на два «отдельных» множества — открытых луча, а на сфере это неверно. Таким образом, об аксиомах порядка на сферических прямых говорить не приходится.

Одна из аксиом планиметрии гласит: всякая прямая разбивает плоскость на две открытые полуплоскости — два непустых множества, таких, что для точек A и B, принадлежащих разным множествам, отрезок AB пересекает данную прямую, а если A и B принадлежат одному множеству, то $[AB]$ не пересекает прямую. Легко видеть, что это утверждение верно и в сферической геометрии: большая окружность разбивает сферу на две открытые полусферы, причем выполнены соответствующие требования (рис. 8). Строгое доказательство проводится исходя из аксиом стереометрии (проведите его самостоятельно).

Мы проанализировали все планиметрические аксиомы, кроме так называемой «аксиомы подвижности», о ней речь будет идти в § 4. Оказалось, что некоторые из аксиом выполняются или «почти» выполняются и в сферической геометрии, другие же приходится отбросить. Сферическую геометрию можно рассматривать как модель геометрии, в которой некоторые обычные аксиомы геометрии не справедливы, т. е. как простейшую модель неевклидовой геометрии.

Вообще, говоря о моделях геометрии, подразумевают некоторое множество точек, вместе с совокупностью выделенных подмножеств этого множества, называемых прямыми. Геометрические модели возникают при изучении геометрических свойств окружающего реального мира; при этом абстрагируются от всяких физических и прочих не геометрических свойств. Так, при изучении геометрии поверхности Земли на сравнительно небольших, «плоских» участках возникла обычная, так называе-

мая евклидова геометрия (планиметрия). Как уже говорилось выше, потребности астрономии и навигации привели к геометрии с другими, иногда сходными с планиметрическими, а иногда существенно отличными свойствами, к сферической геометрии. Модели геометрий с различными свойствами можно мыслить и совсем абстрактно, отвлекаясь от геометрических свойств реального мира Такие модели помогают анализировать сущность различных геометрических понятий и связь между ними (см., например, «Геометрия, 8», п. 135—138).

Упражнения

7. Две прямые на сфере называются перпендикулярными, если угол между ними прямой. Выясните, будет ли в сферической геометрии верна, «почти» верна или совсем неверна следующая теорема: через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.

8. Выясните, верно ли в сферической геометрии предложение: множество точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

9. Окружностями в сферической геометрии называются сечения сферы с плоскостями, не проходящими через центр сферы. Докажите, что сферическая окружность есть множество точек, удаленных от данной точки сферы (центра) на данное сферическое расстояние (сферический радиус). Как найти обычный радиус r окружности на сфере, если известен ее сферический радиус ρ, а также радиус сферы R?

10. Используя обычный циркуль, на поверхности шара можно проводить окружности. Как, используя такие построения и обычные геометрические построения на плоскости, найти радиус шара, т. е. построить отрезок длины, равной радиусу шара?

11. Как с помощью циркуля через две данные на поверхности шара точки провести большую окружность?

12. а) Верно ли, что около любого сферического треугольника можно описать окружность? б) Верно ли, что в любой сферический треугольник можно вписать окружность?

§ 3. СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Длины сторон и величины углов произвольного треугольника на плоскости связаны между собой определенными соотношениями, важнейшие из которых называются теоремами косинусов и синусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C},$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}.$$

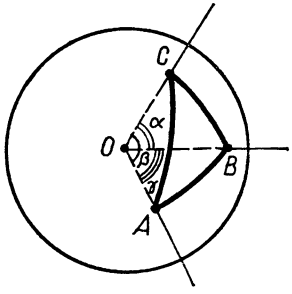

Рис. 9

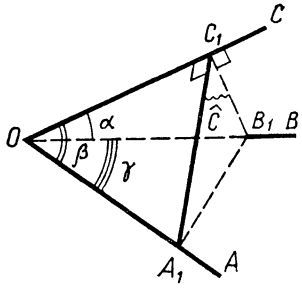

Рис. 10

В этих формулах a, b, c — длины сторон треугольника ABC, лежащих соответственно против углов A, B и C. Эти формулы позволяют по трем элементам треугольника — длинам сторон и углам — восстановить остальные три элемента. Они применяются при решении практических задач, например в геодезии. В этом параграфе мы выведем аналогичные соотношения для сферических треугольников.

Напомним, что сферическому треугольнику ABC на сфере (O, R) отвечает трехгранный угол $OABC$, причем величины углов A, B и C этого треугольника равны величинам двугранных углов при соответствующих ребрах OA, OB, OC трехгранного угла, а длины противолежащих сторон a, b, c связаны с соответствующими плоскими углами $\alpha=\angle BOC$, $\beta=\angle AOC$ и $\gamma=\angle AOB$ трехгранного угла (рис. 9) формулами $a=R\alpha$, $b=R\beta$, $c=R\gamma$, где R — радиус сферы (см. § 1, теорема 2). Поскольку значение R фиксировано, вместо длин сторон a, b и c будем рассматривать плоские углы α, β и γ.

Теорема косинусов для сферических треугольников или для трехгранных углов должна получиться в результате решения следующей задачи: зная плоские углы α и β, а также двугранный угол $\hat{C}$ между ними, найти третий плоский угол γ трехгранного угла $OABC$ (рис. 10). Изложим решение этой задачи.

Конечно, γ отыскивается с помощью обычной теоремы косинусов, примененной к некоторому треугольнику OA_1B_1, где $A_1\in[OA)$, $B_1\in[OB)$. Чтобы ввести в рассмотрение данный двугранный угол, возьмем на ребре OC произвольную точку C_1 и построим линейный угол $A_1C_1B_1$ двугранного угла при этом ребре. Для этого проведем прямые C_1A_1 и C_1B_1 в плоскостях соответствующих граней до пересечения с ребрами OA и OB в точках A_1 и B_1:

$$(C_1A_1)\perp(OC),\quad (C_1B_1)\perp(OC)$$

(рис. 10); мы ограничимся пока случаем острых плоских углов α и β. Осталось дважды применить теорему косинусов — сначала к треугольнику $A_1C_1B_1$, а затем к треугольнику OA_1B_1. Проведем необходимые вычисления.

Если $|OC_1|=z$, то $|C_1A_1|=z\operatorname{tg}\beta$, $|C_1B_1|=z\operatorname{tg}\alpha$; поскольку $\overset{\frown}{A_1C_1B_1}=\hat{C}$, то

$$|A_1B_1|^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha+z^2\operatorname{tg}^2\beta-2z^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\hat{C}. \qquad (1)$$

С другой стороны, в треугольнике OA_1B_1 имеем:

$$|OA_1|=\frac{z}{\cos\beta},\quad |OB_1|=\frac{z}{\cos\alpha},\quad \overset{\frown}{A_1OB_1}=\gamma,$$

поэтому

$$|A_1B_1|^2=\frac{z^2}{\cos^2\alpha}+\frac{z^2}{\cos^2\beta}-2z^2\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Приравняв правые части формул (1), (2) и воспользовавшись известным соотношением

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+\operatorname{tg}^2\varphi,$$

получим:

$$z^2\operatorname{tg}^2\alpha+z^2\operatorname{tg}^2\beta-2z^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\hat{C}=z^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+z^2(1+\operatorname{tg}^2\beta)-$$
$$-2z^2\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma.$$

Отсюда после сокращений получаем:

$$-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\hat{C}=2-2\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma,$$

$$-\sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}=\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma,$$

и, наконец,

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}. \qquad (3)$$

Это и есть знаменитая теорема косинусов сферической тригонометрии. Хотя при ее выводе мы считали, что $\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\beta<\frac{\pi}{2}$, нетрудно проверить, что она верна для произвольного трехгранного угла или сферического треугольника — проверьте это самостоятельно, разобрав оставшиеся случаи. (Другой вывод формулы (3) см. в «Приложении» к учебнику «Геометрия, 9».)

Прежде чем доказать аналог теоремы синусов для сферических треугольников, напомним одно из доказательств теоремы синусов для плоских треугольников. Проведем в треугольнике ABC высоту CH (рис. 11). Тогда независимо от величины углов A и B длина высоты связана с длинами противолежащих сторон соотношениями $|CH|=b\sin\hat{A}=a\sin\hat{B}$, откуда следует, что

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}.$$

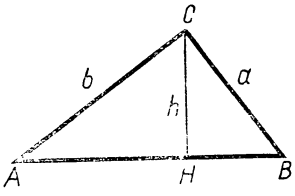

Рис. 11

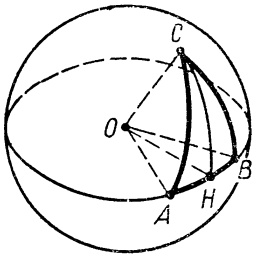

Рис. 12

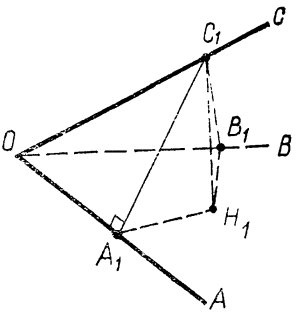

Рис. 13

Точно так же доказывается и второе равенство в теореме синусов.

В сферическом треугольнике ABC тоже можно провести высоту CH — дугу большой окружности, перпендикулярную большой окружности AB (рис. 12). Длине высоты $|CH|_s$ отвечает величина угла COH: если $\overset{\wedge}{COH}=\varphi$, то $|CH|_s=R\varphi$. Это наводит на следующее построение для соответствующего трехгранного угла $OABC$. Возьмем на ребре OC произвольную точку C_1 и проведем из нее перпендикуляры C_1A_1 к (OA), C_1B_1 к (OB) и C_1H_1 к плоскости OAB (см. рис. 13); мы опять рассматриваем случай острых углов α, β, $\hat{A}$ и $\hat{B}$. По теореме о трех перпендикулярах $(H_1A_1)\perp(OA)$, $(H_1B_1)\perp(OB)$, поэтому углы $C_1A_1H_1$ и $C_1B_1H_1$ будут линейными углами соответствующих двугранных углов: $\overset{\wedge}{C_1A_1H_1}=\hat{A}$, $\overset{\wedge}{C_1B_1H_1}=B$. Из прямоугольных треугольников OA_1C_1 и $C_1H_1A_1$, обозначив $|OC_1|=z$, находим:

$$|C_1H_1|=z\sin\beta\ \sin\hat{A}. \tag{4}$$

Аналогично из прямоугольных треугольников OB_1C_1 и $C_1H_1B_1$

$$|C_1H_1|=z\sin\alpha\ \sin\hat{B}. \tag{5}$$

Приравнивая правые части равенств (4) и (5), получим:

$$\sin\beta\sin\hat{A}=\sin\alpha\sin\hat{B},$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\hat{A}}=\frac{\sin\beta}{\sin\hat{B}}.$$

Точно так же доказывается, что

$$\frac{\sin\beta}{\sin\hat{B}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\hat{C}}.$$

Получающиеся в итоге формулы

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\hat{A}}=\frac{\sin\beta}{\sin\hat{B}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\hat{C}} \tag{6}$$

и составляют содержание теоремы синусов для сферических треугольников или трехгранных углов. Опять-таки можно проверить, что эта теорема справедлива для произвольного сферического треугольника (особого рассмотрения заслуживает случай, когда $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ — в этом случае высота CH сферического треугольника ABC определена неоднозначно).

В заключение рассмотрим вопрос о связи обычных планиметрических и сферических теорем синусов и косинусов. Заметим, что внешне формулы косинусов на плоскости и на сфере непохожи. С другой стороны, на маленьких участках сферу можно считать «почти плоской», тогда (т. е. при малых по сравнению с радиусом R сферы длинах сторон сферического треугольника ABC) сферическая теорема косинусов должна «почти перейти» в планиметрическую, и то же самое для теоремы синусов. Проверим, так ли это.

Длины сторон a, b, c сферического треугольника ABC связаны с соответствующими плоскими углами α, β, γ трехгранного угла $OABC$ формулами $\alpha=\frac{a}{R}$, $\beta=\frac{b}{R}$, $\gamma=\frac{c}{R}$, поэтому рассматриваемый случай (a, b, c много меньше, чем R) отвечает тому, что $\alpha\approx 0$, $\beta\approx 0$, $\gamma\approx 0$. Вспомним, что при малых φ значение $\sin\varphi$ приближенно равно φ:

$$\sin\varphi\approx\varphi \quad \left(\text{или } \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1\right).$$

Отсюда можно вывести аналогичную приближенную формулу для $\cos\varphi$ при малых φ:

$$\cos\varphi=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\approx 1-2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2=1-\frac{\varphi^2}{2}.$$

Подставляя соответствующие приближения в формулы синусов и косинусов (формулы (6) и (3)), получим приближенные формулы для малых сферических треугольников:

$$\frac{\alpha}{\sin\hat{A}}\approx\frac{\beta}{\sin\hat{B}}\approx\frac{\gamma}{\sin\hat{C}},$$

$$1-\frac{\gamma^2}{2}\approx\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)+\alpha\beta\cos\hat{C}\approx 1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}+\alpha\beta\cos\hat{C},$$

откуда

$$\gamma^2\approx\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\hat{C}$$

(мы отбросили в предпоследнем соотношении слагаемое четвертой степени $\alpha^2\beta^2/4$, поскольку оно мало по сравнению со слагаемыми второй степени — γ^2, α^2, β^2, $\alpha\beta\cos\hat{C}$). Подставляя в полученные формулы $\alpha=\frac{a}{R}$, $\beta=\frac{b}{R}$, $\gamma=\frac{c}{R}$, мы действительно получим обычные теоремы синусов и косинусов!

Упражнения

13. Найдите величину плоского угла γ трехгранного угла, если $\alpha=\beta=45°$, $\hat{C}=90°$.

14. Запишите аналог теоремы Пифагора для прямоугольных сферических треугольников и трехгранных углов. Проверьте, что в случае малых сферических треугольников записанной формуле отвечает обычная теорема Пифагора.

Следующие задачи (15—17) касаются замечательной конструкции — перехода к полярным многогранным углам.

15. Пусть $OABC$ — данный трехгранный угол. Построим лучи OA^*, OB^*, OC^*, перпендикулярные к плоскостям OBC, OAC и OAB соответственно, и такие, что лучи OA^* и OA, OB^* и OB, OC^* и OC лежат по разные стороны от этих плоскостей. Трехгранный угол $OA^*B^*C^*$, определяемый своими ребрами OA^*, OB^*, OC^*, называется полярным по отношению к трехгранному углу $OABC$. Докажите, что угол, полярный к углу $OA^*B^*C^*$, совпадает с $OABC$.

16. Найдите элементы полярного угла $OA^*B^*C^*$, т. е. элементы α^*, β^*, γ^*, $\hat{A}^*$, $\hat{B}^*$, $\hat{C}^*$, если известны элементы исходного угла $OABC$ (α, β, γ, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$).

17. Докажите, что для любого трехгранного угла справедливо соотношение

$$\cos\hat{C}=-\cos\hat{A}\cos\hat{B}+\sin\hat{A}\sin\hat{B}\cos\gamma$$

(иногда его называют второй теоремой косинусов).

18. Будем считать известным, что сумма $\alpha+\beta+\gamma$ плоских углов трехгранного угла может меняться от 0 до 2π. Выясните, в каких пределах может меняться сумма $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ двугранных углов трехгранного угла.

§ 4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СФЕРЫ

По аналогии с планиметрией можно определить перемещение сферы как такое отображение f сферы на себя, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками сферы:

$$\text{если } A'=f(A),\ B'=f(B),\ \text{то } |A'B'|_s=|AB|_s.$$

Простейшим примером перемещения сферы является поворот сферы вокруг любой оси, проходящей через центр сферы. В отличие от поворота плоскости такой поворот сферы имеет два «центра» — две диаметрально противоположные точки (A и A' на рис. 14), которые остаются неподвижными при повороте. Симметрия сферы относительно плоскости α, проходящей через центр сферы, также является перемещением сферы. Это преобразование вполне аналогично симметрии плоскости относительно прямой — роль оси симметрии играет большая окружность,

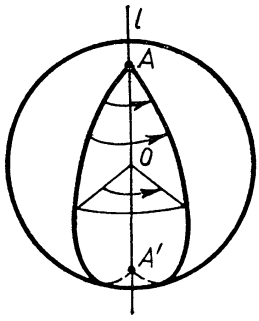

Рис. 14

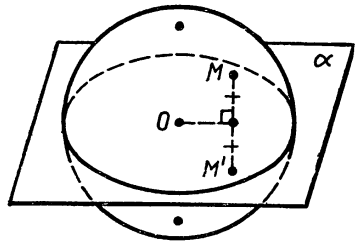

Рис. 15

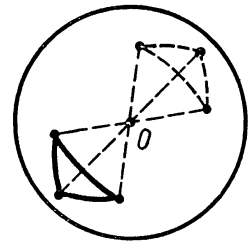

Рис. 16

получающаяся при пересечении плоскости α со сферой (рис. 15). Наконец, сфера отображается на себя при симметрии Z_O относительно своего центра (рис. 16).

Две фигуры на сфере называются конгруэнтными ($\Phi_1 \cong \Phi_2$), если существует перемещение сферы, отображающее первую фигуру на вторую. Например, треугольники T, T_1 и T', изображенные на рисунке 17, конгруэнтны (назовите соответствующие перемещения). Заметим, что треугольники T и T' нельзя «наложить» один на другой, «вырезав» их из сферы, подобно тому, как нельзя совместить между собой правую и левую руку. Такие конгруэнтные фигуры иногда называют зеркально-конгруэнтными (отметим, что на плоскости таких фигур не бывает, так как одну фигуру всегда можно «наложить» на конгруэнтную ей фигуру; правда, для этого, может быть, придется вывести первую фигуру в пространство).

Как и в планиметрии, композиция любых двух перемещений сферы снова является перемещением сферы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Композиция $S_2 \circ S_1$ двух симметрий относительно плоскостей «1» и «2», как нетрудно видеть, будет поворотом вокруг прямой l, по которой пересекаются эти плоскости (рис. 18). Если угол между плоскостями равен φ, то угол поворота равен 2φ (см. рис. 18). Конечно, верно и обратное: пово-

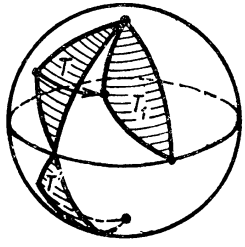

Рис. 17

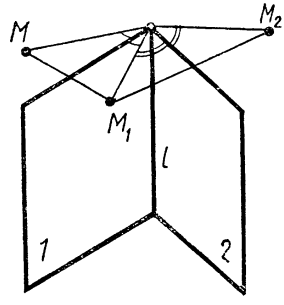

Рис. 18

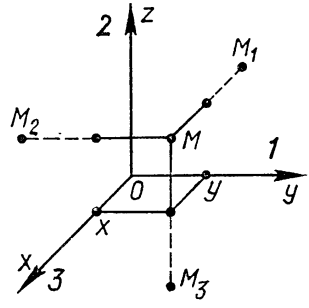

Рис. 19

рот K_l^{φ} вокруг оси l на угол φ можно представить как композицию симметрий относительно двух плоскостей, которые проходят через прямую l и образуют друг с другом угол $\frac{\varphi}{2}$.

Пример 2. Пусть «1», «2» и «3» — три взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающиеся в точке O. Примем эти плоскости за координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy (рис. 19). Если M — точка с координатами (x, y, z), то при симметрии $S_1 = S_{Oyz}$ абсцисса M меняет знак:

$$S_1(M(x, y, z)) = M_1(-x, y, z).$$

Аналогично $S_2(M(x, y, z)) = M_2(x, -y, z)$ и $S_3(M(x, y, z)) = M_3(x, y, -z)$. Следовательно, если применить к точке $M(x, y, z)$ композицию всех трех симметрий в произвольном порядке, то получится точка M' с координатами $(-x, -y, -z)$, т. е. точка, центрально-симметричная исходной относительно точки O. Поэтому эта композиция есть центральная симметрия Z_O:

$$S_3 \circ S_2 \circ S_1 = Z_O.$$

Заметим, что взаимная перпендикулярность плоскостей «1», «2» и «3» здесь существенна.

Оказывается, что любое перемещение сферы можно представить в виде композиции симметрий относительно плоскостей. Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Произвольное перемещение f сферы (O, R) является либо тождественным преобразованием E, т. е. $f(M) = M$ для любой точки M, либо симметрией относительно некоторой плоскости, либо композицией двух или трех симметрий относительно плоскостей: $f = E$, или $f = S_1$, или $f = S_2 \circ S_1$, или $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.*

Мы докажем эту лемму, опираясь на следующее допущение: если A, B и C — три точки сферы, не принадлежащие одной большой окружности, а точки A', B' и C' таковы, что $|A'B'|_s = |AB|_s$, $|A'C'|_s = |AC|_s$, $|B'C'|_s = |BC|_s$, т. е. длины сторон сферических треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно равны, то существует не более одного перемещения сферы, при котором точка A переходит в точку A', точка B — в B' и точка C — в C'.

Наглядно это утверждение ясно. Действительно, если мы совместим точку A с A', а точку B с B', то для точки C остается только две возможности — либо C совпадает с C', либо C совпадает с точкой C'', симметричной с C' относительно плоскости $OA'B'$ (рис. 20). А поскольку мы знаем, что точка C должна перейти в C', остается одна возможность: $C \to C'$ (образы остальных точек сферы при этом определяются однозначно).

Доказательство леммы. Пусть f — произвольное перемещение сферы. Рассмотрим три точки A, B и C сферы, не принадлежащие одной большой окружности, и их образы A', B' и C' при перемещении f; тогда эти точки удовлетворяют условиям сделанного выше допущения. Идея дальнейшего рассуждения состоит в том, чтобы последовательными симметриями относительно плоскостей перевести точку A в A', точку B — в B', C — в C'. Для этого потребуется не более трех симметрий, а при их композиции все три точки A, B, C перейдут соответственно в точки A', B' и C'. Поскольку любая композиция симметрий является перемещением, из допущения о единственности перемещения, отображающего точки A, B и C на точки A', B' и C' соответственно, следует, что f совпадает с построенной композицией. Перейдем к построению композиции симметрий, последовательно разобрав все возможные случаи.

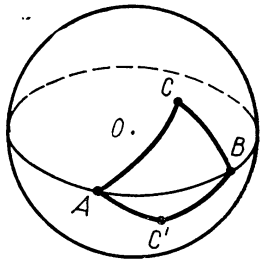

Рис. 20

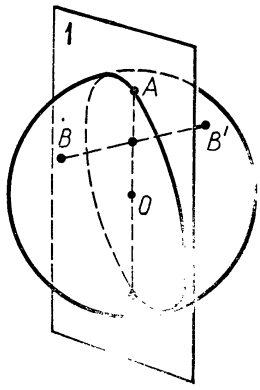

Рис. 21

Случай I. $A'=A$, $B'=B$, $C'=C$.

Очевидно, что в этом случае $f=E$.

Случай II. $A'=A$, $B'=B$, $C'\neq C$.

Поскольку точки C и C' равноудалены от точек A и B, они симметричны относительно плоскости «1»$=(OAB)$ (см. рис. 20), поэтому при симметрии S_1 точки A, B, C переходят в $A'=A$, $B'=B$, C' и $f=S_1$.

Случай III. $A'=A$, $B'\neq B$, $C'\neq C$.

Рассмотрим плоскость симметрии точек B и B' — это будет плоскость «1», проведенная через середину отрезка BB' перпендикулярно ему (рис. 21). Плоскость «1» состоит из точек, равноудаленных от B и B' («Геометрия, 9», задача 279), поэтому точки O (центр сферы) и $A=A'$ принадлежат этой плоскости ($|OB|=|OB'|=R$, $|AB|=|A'B'|=|AB'|$, ибо $|AB|_s=|A'B'|_s$ и $A'=A$). Следовательно, при симметрии S_1 сфера (O, R) отображается на себя ($O\in$«1»), причем точки A и B переходят в точки $A'=A$ и B'. Для точки C (см. рис. 20) имеется две возможности — либо C переходит в C', и тогда $f=S_1$, либо C переходит в C'', и тогда нужно рассмотреть симметрию S_2 относительно плоскости «2»$=(OA'B')$. При композиции $S_2\circ S_1$ точки A, B, C переходят в точки A', B', C', поэтому $f=S_2\circ S_1$.

Случай IV. $A'\neq A$, $B'\neq B$, $C'\neq C$.

Рассмотрим плоскость симметрии точек A и A' — пусть это

будет плоскость «1». При симметрии S_1 точка A отображается на A', а точки B и C — на какие-то точки B_1 и C_1. Может случиться, что $B'=B$, $C'=C$, тогда $f=S_1$. Если $B_1=B'$, $C_1\neq C'$, то применяем рассуждения случая II, тогда $f=S_2\circ S_1$, где «2»$=(OA'B')$. Наконец, если $B_1\neq B'$, $C_1\neq C'$, то применяем рассуждения случая III, тогда либо $f=S_2\circ S_1$, где «2»— плоскость симметрии точек B_1 и B', либо $f=S_2\circ S_1$, либо $f=S_3\circ S_2\circ S_1$, где «2»— та же плоскость, а «3»$=(OA'B')$.

Лемма доказана.

Исходя из этой леммы, можно полностью классифицировать перемещения сферы: $f=E$ — тождественное преобразование, либо $f=S_1$ — симметрия, либо $f=S_2\circ S_1=R_l^{\varphi}$ — поворот (см. пример 1). Остается разобрать случай $f=S_3\circ S_2\circ S_1$. Оказывается, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 (Эйлера). ***Любое перемещение сферы есть либо тождественное преобразование, либо поворот относительно оси, либо симметрия относительно плоскости, либо вращательная симметрия.***

(Вращательной симметрией называется композиция $S_\alpha\circ R_k^{\omega}$ поворота относительно оси k и симметрии относительно плоскости α, перпендикулярной к оси k; обычную симметрию можно рассматривать как частный случай вращательной симметрии — $\omega=0$.)

Доказательство. Нам осталось рассмотреть единственный случай — перемещение f сферы представляется в виде композиции трех симметрий, т. е. $f=S_3\circ S_2\circ S_1$. Композиция двух симметрий $S_2\circ S_1$ есть поворот R_l^{φ} относительно прямой l, являющейся пересечением плоскостей «1» и «2». Эта композиция не изменится, если повернуть плоскости «1» и «2» относительно оси l на один и тот же угол (после поворота угол между плоскостями по-прежнему будет равен $\frac{\varphi}{2}$, см. пример 1). Повернем плоскости «1» и «2» так, чтобы плоскость «2» стала перпендикулярной к плоскости «3» (объясните, как это сделать), и рассмотрим еще одну плоскость симметрии сферы, перпендикулярную плоскостям «2» и «3», пусть это будет плоскость «0». Заметим, что $S_0\circ S_0=E$ — тождественное преобразование, поэтому f можно записать в виде

$$f=S_3\circ S_2\circ S_1=S_3\circ S_2\circ E\circ S_1=S_3\circ S_2\circ (S_0\circ S_0)\circ S_1=$$
$$=(S_3\circ S_2\circ S_0)\circ (S_0\circ S_1).$$

Поскольку плоскости «0», «2» и «3» взаимно перпендикулярны, $S_3\circ S_2\circ S_1=Z_O$ — центральная симметрия (см. пример 2), а $S_0\circ S_1=R_k^{\varphi}$ — поворот вокруг прямой пересечения плоскостей «0» и «1». Таким образом, $f=Z_O\circ R_k^{\varphi}$.

Проведем теперь плоскость симметрии сферы α, перпендикулярную оси k. Рисунок 22 показывает, что центральная симметрия Z_O представляется как композиция осевой симметрии

R_k^{π} и симметрии S_α, т. е. $Z_O = S_\alpha \circ R_k^{\pi}$. Следовательно, рассматриваемое перемещение f можно записать в виде

$$f = Z_O \circ R_k^{\varphi} = (S_\alpha \circ R_k^{\pi}) \circ R_k^{\varphi} = \\ = S_\alpha \circ (R_k^{\pi} \circ R_k^{\varphi}) = S_\alpha \circ R_k^{\omega},$$

где $\omega = \pi + \varphi$. Это и требовалось доказать.

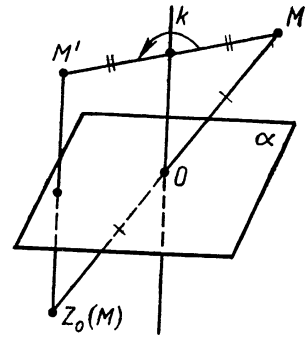

Рис. 22

В заключение отметим, что в ходе доказательства леммы показана конгруэнтность сферических треугольников со сторонами соответственно равной длины. Аналогичные рассуждения доказывают еще два признака конгруэнтности сферических треугольников — по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим углам. Эти три признака отвечают трем признакам конгруэнтности треугольников на плоскости. Оказывается, в сферической геометрии имеет место еще один признак конгруэнтности треугольников — по трем углам (см. ниже задачи 26, 27).

Упражнения

19. Докажите, что для произвольных отображений f_1, f_2, f_3 некоторого множества M в себя для композиций этих отображений справедливо соотношение

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1).$$

(В частности, это справедливо для перемещений сферы, плоскости или пространства. Мы использовали данный факт в рассуждениях § 4, записывая композицию трех и более симметрий без всяких скобок или расставляя скобки нужным нам образом.)

20. Приведите пример, показывающий, что для двух перемещений сферы f и g композиция $g \circ f$ может быть отлична от композиции $f \circ g$. (В рассуждениях § 4 мы нигде не переставляли перемещения в записи композиции!)

21. Выясните, каким перемещением пространства является композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ симметрии относительно двух параллельных плоскостей α и β.

22. Докажите, что композиция двух поворотов сферы на углы π относительно взаимно перпендикулярных осей является поворотом на тот же угол π относительно оси, перпендикулярной к двум данным осям.

23. Докажите, что композиция двух поворотов сферы $R_l^{\varphi} \circ R_k^{\varphi}$ также будет поворотом сферы. Укажите, как построить ось получающегося поворота.

Указание к задачам 22—23: представьте оба поворота в виде композиции симметрий относительно подходящим образом выбранных плоскостей.

24. Выясните, сколько существует перемещений пространства, при которых отображается на себя данный: а) правильный тетраэдр; б) куб.

25. Пусть перемещение f сферы представляется в виде вращательной симметрии $S_\alpha \circ R_k^\omega$, где $\alpha \perp k$. Однозначно ли определяются при таком представлении плоскость α и ось k?

26. Докажите, что если углы одного сферического треугольника соответственно равны углам другого сферического треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Указание. Предварительно докажите, что из конгруэнтности двух трехгранных углов следует конгруэнтность полярных к ним трехгранных углов.

27. Существуют ли преобразования подобия сферы, отличные от перемещений (т. е. такие отображения f сферы на себя, что для любых двух точек A и B

$$|f(A)f(B)|_s = k|AB|_s, \text{ где } k \neq 1 \text{ и } k \neq 0)?$$

§ 5. ПЛОЩАДИ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Напомним, что площадью многоугольника Φ на плоскости называется такая положительная величина $S(\Phi)$, определенная для всех многоугольников, которая удовлетворяет следующим условиям («аксиомам площади»):

а) если Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны, то $S(\Phi_1) = S(\Phi_2)$;

б) если Φ есть объединение двух многоугольников Φ_1 и Φ_2, не имеющих общих внутренних точек (т. е. пересекающихся только по границе), то

$$S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2);$$

в) за единицу площади принимается площадь квадрата K со сторонами длины 1, т. е. $S(K) = 1$.

Путем несложных рассуждений из этих условий выводятся формулы площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции.

Аналогичным образом вводится и понятие площади $S(\Phi)$ для сферических многоугольников Φ, причем условия а) и б) повторяются дословно. Единицу же площади многоугольников на сфере (O, R) естественно выбрать так, чтобы площадь всей сферы равнялась $4\pi R^2$, как и полагается. Выведем теперь формулы для площади сферических многоугольников. Начнем с двуугольника.

Прежде всего, заметим, что сферу можно разбить на 360 двуугольников с величиной угла 1° каждый — достаточно провести плоскости через прямую AA' (A и A' — диаметрально противоположные точки) под углом в 1° одну к другой, как схема-

тично показано на рисунке 23. Все эти двуугольники конгруэнтны, ибо отображаются друг на друга при соответствующих поворотах около оси AA'. Следовательно, их площади равны между собой (по условию а)), а поскольку объединение этих двуугольников есть сфера, то площадь каждого из них равна $4\pi R^2/360$ согласно условиям б) и в). Если же мы имеем двуугольник с углом величины $A°$, то его площадь берут в A раз больше, чем $4\pi R^2/360$, поэтому можно записать:

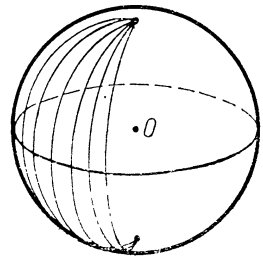

Рис. 23

$$S(AA') = \frac{A}{360} \cdot 4\pi R^2 = 2\left(2\pi \frac{A}{360}\right)R^2 =$$

$$= 2\hat{A}R^2, \qquad (1)$$

где $\hat{A}$ — радианная мера угла двуугольника. Нужная формула получена.

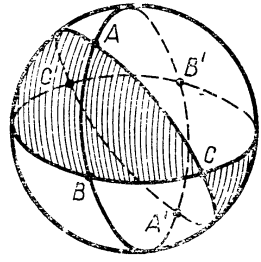

Рис. 24

Рассмотрим теперь произвольный сферический треугольник ABC. Найдем его площадь $S(ABC)$. Достроив стороны треугольника ABC до больших окружностей, мы получим (рис. 24) разбиение полусферы на 4 сферических треугольника — ABC, ACB', BCA' и $CB'A'$. Согласно условию в) сумма их площадей должна быть равна площади полусферы, т. е. $4\pi R^2/2 = 2\pi R^2$:

$$S(ABC) + S(ACB') + S(BCA') + S(CB'A') = 2\pi R^2. \qquad (2)$$

Заметим, что объединение треугольников ABC и BCA' есть двуугольник AA', площадь которого нам известна; следовательно,

$$S(ABC) + S(BCA') = S(AA') = 2\hat{A}R^2.$$

Аналогично

$$S(ABC) + S(ACB') = S(BB') = 2\hat{B}R^2.$$

Наконец, треугольник $CB'A'$ дополняется до двуугольника CC' треугольником $A'B'C'$, центрально-симметричным, а поэтому конгруэнтным и имеющим одинаковую площадь с ABC; следовательно,

$$S(ABC) + S(CB'A') = S(A'B'C') + S(CB'A') = S(CC') = 2\hat{C}R^2.$$

Из последних трех формул можно выразить площади треугольников BCA', ACB' и $CB'A'$ через площади соответствующих двуугольников и искомую площадь $S = S(ABC)$. Подставив эти выражения в соотношение (2), находим:

$$S + (2\hat{B}R^2 - S) + (2\hat{A}R^2 - S) + (2\hat{C}R^2 - S) = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})R^2 - 2S =$$

$$= 2\pi R^2,$$

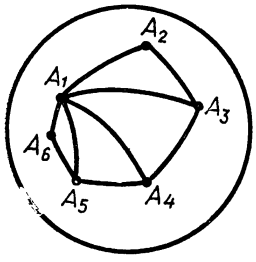

Рис. 25

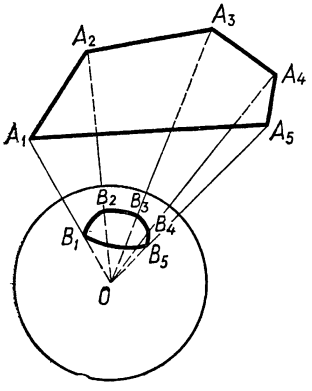

Рис. 26

откуда и получается замечательная формула площади сферического треугольника:

$$S(ABC)=(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi)R^2. \quad (3)$$

Итак, оказывается, что площадь сферического треугольника определяется величинами его углов! Из формулы (3), конечно, вытекает, что сумма углов любого сферического треугольника больше π (сравните с результатом задачи 18, § 3).

Дальше уже совсем нетрудно записать формулу для площади любого (выпуклого) сферического многоугольника $A_1A_2\ldots, A_n$ — разбив его дугами больших окружностей A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} на $(n-2)$ треугольника (рис. 25) и сложив площади всех этих треугольников, получим:

$$S(A_1A_2\ \ldots\ A_n)=(\hat{A}_1+\hat{A}_2+\ \ldots\ +\hat{A}_n-(n-2)\pi)R^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{A}_i-(n-2)\pi\right)R^2 \quad (4)$$

(Σ — знак суммы, индекс i пробегает значения от $i=1$ до $i=n$).

В качестве приложения полученных результатов выведем знаменитую формулу Эйлера для «карт» на сфере и для выпуклых многогранников.

Картой на сфере называется любое разбиение сферы на непересекающиеся выпуклые сферические многоугольники (рис. 25). Один из способов построения карт заключается в следующем. Пусть Φ — любой выпуклый многогранник. Возьмем точку O внутри него и рассмотрим произвольную сферу (O, R) с центром O. Если $A_1A_2\ldots A_n$ — какая-нибудь грань нашего многогранника, то многогранному углу $OA_1A_2\ldots A_n$ обычным образом ставится в соответствие сферический n-угольник $OB_1B_2\ldots B_n$ на сфере (O, R) (рис. 26). Рассматривая все грани многогранника Φ, мы и получим из соответствующих сферических многоугольников карту на сфере.

Теорема 5 (Эйлера). ***Если B — число вершин произвольного выпуклого многогранника, P — число его ребер, Γ — число граней, то эти числа всегда связаны соотношением***

$$B-P+\Gamma=2 \quad (5)$$

(формула 5 называется формулой Эйлера).

Например, для n-угольной пирамиды $В=n+1$, $Р=2n$, $Г=n+1$ и $В-Р+Г=(n+1)-2n+(n+1)=2$. Для n-угольной призмы $В=2n$, $Р=3n$, $Г=n+2$ и $В-Р+Г=2n-3n+n+2=2$. Для октаэдра $В=6$, $Р=12$, $Г=8$ и опять $В-Р+Г=6-12+8=2$.

Чтобы доказать формулу Эйлера для произвольного выпуклого многогранника, мы рассмотрим карту на сфере, построенную, как описано выше, проецированием этого многогранника на сферу. Ради удобства выберем радиус сферы равным 1.

Доказательство. Сумма площадей всех сферических многоугольников построенной по многоугольнику карты на сфере равна площади всей сферы, т. е. 4π ($R=1$). Эту же сумму мы должны получить, сложив правые части формул для площадей каждого из Г штук многоугольников. Перенумеруем многоугольники индексом k от $k=1$ до $k=Г$; обозначим через n_k число вершин, или, что то же самое, число ребер k-го многоугольника. Тогда указанное сложение, как следует из формулы (4), при $R=1$ дает два слагаемых:

1) сумму всех углов всех многоугольников карты; при каждой вершине эта сумма, очевидно, равна 2π, а раз вершин В, то полная сумма равна $2\pi В$;

2) сумму $\sum_{i=1}^{Г} -(n_k-2)\pi = -(n_1+n_2+\ \ldots\ +n_Г)\pi+2\pi Г$

(продумайте!); в сумме $n_1+n_2+\ \ldots\ +n_Г$ мы считаем все стороны наших сферических многоугольников, при этом каждую сторону дважды, ибо она принадлежит двум многоугольникам. Очевидно, что число сторон многоугольников карты равно числу ребер многогранника Р, поэтому второе слагаемое можно записать в виде $-2Р\pi+2\pi Г$.

Согласно сказанному в начале доказательства сумма $2\pi В-2\pi Р+2\pi Г$ должна равняться 4π, откуда и следует формула Эйлера: $В-Р+Г=2$.

Доказательство показывает, что формула Эйлера справедлива для любой карты на сфере, если Г — число многоугольников карты, Р — общее число их ребер, В — число их вершин[1]. Ниже, в задаче 29, предлагается еще одно, на этот раз планиметрическое доказательство формулы Эйлера.

Упражнения

28. Придумайте невыпуклую замкнутую поверхность, составленную из выпуклых многоугольников, для которой формула Эйлера была бы несправедлива.

[1] Отметим, что формула, носящая имя Эйлера, была известна задолго до него. Заслуга Эйлера состоит в том, что он увидел справедливость этой формулы для карт на произвольных поверхностях, получающихся деформацией сферы, и тем самым положил начало науке, изучающей подобные деформации, так называемой топологии.

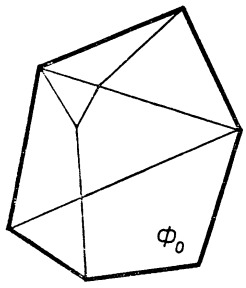

Рис. 27

29. Если «рассматривать» выпуклый многогранник снаружи, из точки, достаточно близкой к одной из его граней Φ_0, то все остальные грани будут казаться лежащими внутри грани Φ_0 — многоугольник Φ_0 будет разбит на $\Gamma - 1$ меньших многоугольников (рис. 27).

Найдите сумму углов этих многоугольников двумя способами: сложив суммы углов сначала по многоугольникам, а потом сложив углы по вершинам. Приравняв полученные результаты, выведите из этого равенства формулу Эйлера.

30. Докажите с помощью формулы Эйлера, что не существует многогранников, все грани которых имели бы по 6 или больше сторон; иными словами, у любого выпуклого многогранника найдется либо 3-угольная, либо 4-угольная, либо 5-угольная грань.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В НАВИГАЦИИ

Навигация (это слово происходит от латинского navigatio — плыву на судне) — одна из наиболее древних наук. Простейшие задачи навигации, такие, например, как определение кратчайшего маршрута, выбор направления движения, встали перед самыми первыми мореплавателями. В настоящее время эти же и другие задачи приходится решать не только морякам, но и летчикам, и космонавтам. Некоторые понятия и задачи навигации, тесно связанные со сферической геометрией, рассмотрим подробнее.

Задача 1. Известны географические координаты — широта и долгота пунктов A и B земной поверхности: φ_A, λ_A и φ_B λ_B. Требуется найти кратчайшее расстояние между пунктами A и B вдоль земной поверхности (радиус Земли считается известным: $R = 6371$ км).

Решение. Напомним сначала, что широтой пункта M земной поверхности называется величина φ_M угла, образованного радиусом OM, где O — центр Земли, с плоскостью экватора: $-90° \leqslant \varphi_M \leqslant 90°$, причем к северу от экватора широта считается положительной, а к югу — отрицательной (рис. 28). Долгота λ_M пункта M есть величина двугранного угла между плоскостями COM и COH, где C — Северный полюс Земли, а H — точка, отвечающая гринвичской обсерватории: $-180° \leqslant \lambda_M \leqslant 180°$ (к востоку от гринвичского меридиана долгота считается положительной, к западу — отрицательной).

Как уже известно, кратчайшее расстояние между пунктами A и B земной поверхности — это длина меньшей из дуг большой окружности, соединяющей A и B (такую дугу называют ортодромией — в переводе с греческого означает «прямой бег»).

Поэтому наша задача сводится к определению длины стороны AB сферического треугольника ABC (C—северный полюс).

Применяя стандартные обозначения для элементов треугольника ABC и соответствующего трехгранного угла $OABC$, из условия задачи находим: $\alpha=\widehat{COB}=90°-\varphi_B$, $\beta=90°-\varphi_A$ (рис. 29). Угол C также нетрудно выразить через координаты точек A и B. По определению $\hat{C}\leqslant 180°$, поэтому либо $\hat{C}=|\lambda_A-\lambda_B|$, если $|\lambda_A-\lambda_B|\leqslant 180°$, либо $\hat{C}=360°-|\lambda_A-\lambda_B|$, если $|\lambda_A-\lambda_B|>180°$. Зная α, β и $\hat{C}$, находим $\gamma=\widehat{AOB}$ с помощью теоремы косинусов:

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}=$$
$$=\sin\varphi_A\sin\varphi_B+\cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_A-\lambda_B)$$

(объясните проделанные преобразования). Зная $\cos\gamma$ и, следовательно, угол γ, находим искомое расстояние:

$$|AB|_s=R\gamma.$$

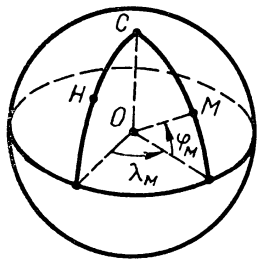

Рис. 28

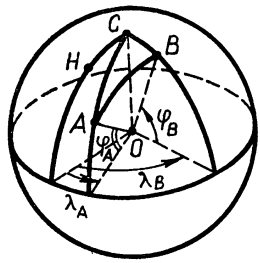

Рис. 29

Задача 2. Вычислить начальный курс корабля при движении по ортодромии из A в B, если известны географические координаты этих точек φ_A, λ_A и φ_B, λ_B.

Решение. Сначала уточним условие. Курсом корабля в точке M называется величина угла, образованного меридианом, проходящим через M, и продольной плоскостью судна. Таким образом, начальный курс судна в точке A — это угол CAB (рис. 29).

Для вычисления этого угла применим теорему косинусов к сферическому треугольнику ABC:

$$\cos\widehat{COB}=\cos\widehat{COA}\cos\widehat{AOB}+\sin\widehat{COA}\sin\widehat{AOB}\cos\hat{A}.$$

Подставляя найденное значение $\cos\gamma$ (см. задачу 1), получаем:

$$\cos\hat{A}=\frac{\sin\varphi_B-\sin\varphi_A(\sin\varphi_A\sin\varphi_B+\cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_A-\lambda_B))}{\cos\varphi_A\sin\gamma}.$$

Хотя ортодромия и является кратчайшим путем на сфере, самолеты и корабли движутся иными маршрутами. Дело в том, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, пересекает различные меридианы под различными углами, и, следовательно, при движении по ортодромии приходится непрерывно менять курс. Это, конечно, практически неосуществимо. Намного проще плавать по постоянному курсу. Кривые, кото-

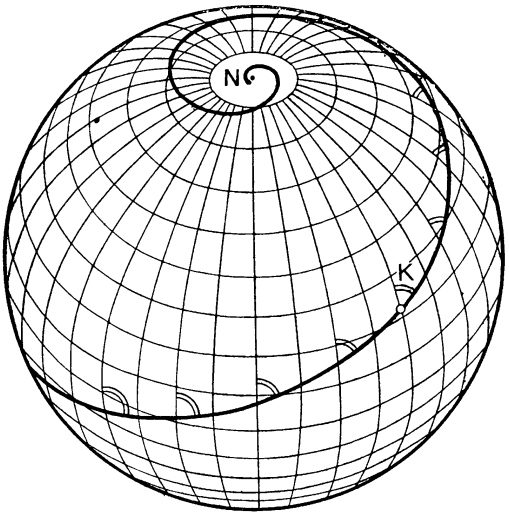

Рис. 30

рые пересекают все меридианы под постоянным углом, называют локсодромиями (в переводе «косой бег»). На рисунке 30 показана локсодромия, пересекающая все меридианы под углом 70°.

Конечно, при движении по локсодромиям путь удлиняется. Но если пункты A и B находятся сравнительно близко друг от друга, то удлинение пути по сравнению с движением по ортодромии AB довольно незначительно. Если же сферическое расстояние $|AB|_s$ велико, то и проигрыш при движении по локсодромии достигает большой величины. Тогда поступают следующим образом: рассчитывают ортодромию, связывающую A и B, вычисляют координаты нескольких промежуточных точек: $A_0=A$, A_1, ..., $A_n=B$, затем определяют курс по локсодромиям, связывающим A_0 и A_1, A_1 и A_2, ..., и следуют этими курсами. Разумеется, чем больше промежуточных точек нанесено на ортодромию, тем меньше этот маршрут отличается от ортодромии (в морской практике промежуточные точки намечают, как правило, так, чтобы они отличались по долготе на 10°).

Для прокладки курса описанным способом необходимо решить ряд задач. Одна из них такова:

Задача 3. Найти соотношение, позволяющее по координатам точек A и B вычислить координаты промежуточных точек ортодромии AB.

(Иными словами, требуется вывести уравнение ортодромии, соединяющей A и B.)

Решение. Заметим сначала, что если данные точки лежат на одном меридиане или экваторе, то уравнение ортодромии находится легко: $\lambda=\text{const}$ или $\varphi=0°$. Если это не так, то ортодромия пересекает экватор в некоторой точке A_0. Обозначим долготу точки A_0 через λ_0, а угол, образованный ортодромией AB с экватором, через K_0. Выведем сначала уравнение ортодромии в предположении, что K_0 и λ_0 известны.

Пусть $X(\varphi, \lambda)$ — произвольная точка этой ортодромии, а Y — точка пересечения меридиана, проходящего через X, с экватором. Тогда треугольник A_0XY — прямоугольный. Рассмотрим его.

По теореме синусов

$$\frac{\sin \hat{A}_0}{\sin \varphi} = \frac{\sin \hat{Y}}{\sin \overset{\frown}{A_0OX}}.$$

Так как $\hat{Y}=90°$, то, обозначив $\lambda-\lambda_0$ через β, а угол $\overset{\frown}{A_0OX}$ через γ, получим:

$$\sin \hat{A}_0 = \cos \hat{K}_0 = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma}. \tag{1}$$

По теореме косинусов

$$\cos \varphi = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}_0.$$

Отсюда

$$\cos \hat{A}_0 = \sin \hat{K}_0 = \frac{\cos \varphi - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma \sin \beta}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем:

$$\operatorname{tg} \hat{A}_0 = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \gamma \sin \beta}{\cos \varphi - \cos \beta \cos \gamma}.$$

По сферической теореме Пифагора

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg} \hat{K}_0 = \operatorname{tg} \hat{A}_0 = \frac{\sin \gamma \sin \beta}{\cos \varphi - \cos^2 \beta \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta}. \tag{3}$$

От полученного уравнения ортодромии по ее угловому коэффициенту (соотношение 3) можно перейти к ее уравнению по двум точкам $A(\lambda_1, \varphi_1)$ и $B(\lambda_2, \varphi_2)$. Дело сводится к решению системы двух уравнений относительно $\hat{K}_0$ и λ_0. В самом деле, координаты точек A и B удовлетворяют уравнению (3). Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} \hat{K}_0 \sin (\lambda_1 - \lambda_0), \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{ctg} \hat{K}_0 \sin (\lambda_2 - \lambda_0). \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_0)}. \tag{6}$$

Из (4) и (5) следует:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0) - \sin(\lambda_2 - \lambda_0)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_0) + \sin(\lambda_2 - \lambda_0)} =$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0\right)}{2 \sin\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0\right) \cos\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right).$$

Так как

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

имеем:

$$\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\lambda_0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right).$$

Из этого соотношения находится λ_0, а из уравнения (3) — K_0.

Решение задачи 3 позволяет находить координаты точек ортодромии, соединяющей $A(\lambda_1, \varphi_1)$ с $B(\lambda_2, \varphi_2)$. Но для того чтобы проложить курс из A в B, требуется также и умение решать следующую задачу: зная координаты точек A и B, найти курс при движении корабля по локсодромии AB. Для решения этой задачи можно вывести уравнение локсодромии AB (см. задачу 33). Но существует и более простой способ.

Этот способ связан с другой проблемой навигации — проблемой выбора карт, наиболее пригодных в судовождении. Поскольку при прокладке курса важнейшую роль играют углы, то первое требование, которым должны удовлетворять карты,

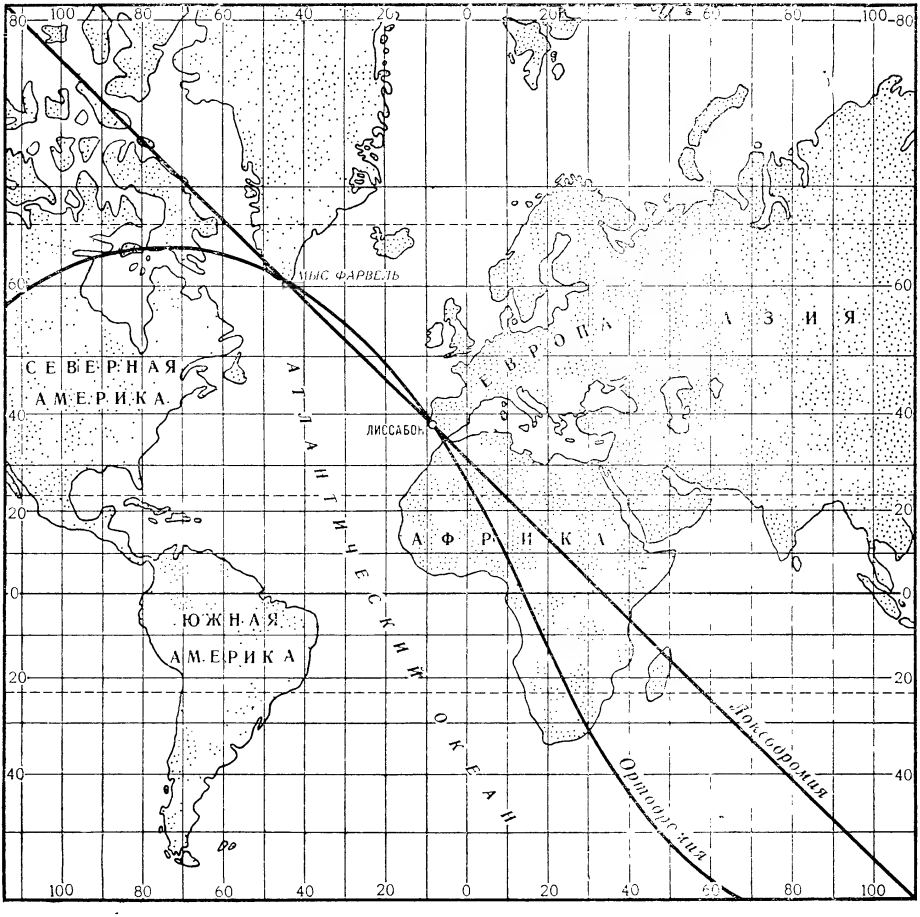

Рис. 31

применяемые в навигации, таково: углы между кривыми на сфере должны быть равны соответствующим им углам на карте. Так как траектории судов на земной поверхности часто состоят из локсодромий, желательно, чтобы локсодромии на навигационных картах изображались возможно проще, а лучше всего отрезками.

Карты, удовлетворяющие двум этим требованиям, существуют. Впервые их предложил фламандский картограф Меркатор около 400 лет тому назад (на рисунке 31 приведен пример такой карты). Задачи, связанные с изготовлением карт, также решаются с участием сферической геометрии. Некоторые из них мы рассмотрим в следующем параграфе.

Упражнения

31. Найдите расстояние при движении ледокола от пункта A (70°, 30°) до пункта B (70°, −170°) при движении: а) по локсодромии; б) по ортодромии.

32. Найдите расстояние от Северного полюса до ортодромии, связывающей точки A и B, координаты которых заданы в условии задачи 31. (Расстояние от точки до фигуры на сфере определяется так же, как и на плоскости.)

33. Найдите курс корабля, плывущего по локсодромии от Лиссабона до мыса Фарвель (рис. 31).

34. Определите географические координаты города или села, в котором вы живете.

35. Пролетает ли самолет, выполняющий рейс Москва — Хабаровск, над озером Байкал (предполагается, что самолет летит по ортодромии)?

§ 7. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Как уже говорилось, при решении многих практических задач Землю удобно считать шаром. Уменьшая этот шар примерно в 10 млн. раз и изображая очертания материков и океанов, озер и рек и т. д., получим глобус. Но пользоваться глобусом далеко не всегда удобно. Основная задача картографии состоит в возможно более точном изображении поверхности глобуса на плоскости. При этом возникает целый ряд трудностей, которые вынуждают искать самые разные способы изображения карт.

Основную причину этих трудностей можно увидеть на наглядном примере. Как бы мы ни пытались наложить сколь угодно малый кусочек резинового мяча или шарика для игры в пинг-понг на поверхность стола, это никак не удается сделать без разрывов, растяжений или налегания отдельных частей друг на друга. На языке математики это означает:

Теорема 6. ***Если подмножество ω сферы содержит сферический сегмент, то ω нельзя отобразить на плоскую фигуру с сохранением расстояний.***

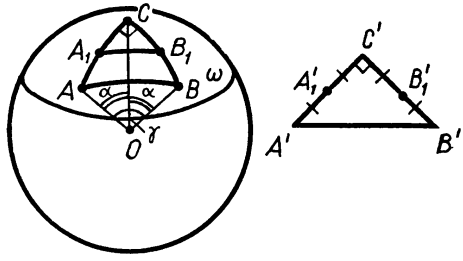

Рис. 32

Доказательство. Допустим, что сохраняющее расстояния отображение f кусочка ω сферы **на** плоскую фигуру существует:

для любых $A\in\omega$, $B\in\omega$ $|f(A)f(B)|=|AB|_s$.

Рассмотрим на ω равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и его образ на плоскости при отображении f. Пусть $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$ (рис. 32). Так как f сохраняет расстояния, то образы середин A_1 и B_1 катетов AC и BC являются серединами A_1' и B_1' отрезков $A'C'$, $B'C'$. По теореме о средней линии треугольника (плоского!) $|A_1'B_1'|=\frac{1}{2}|A'B'|$. Но $|A'B'|=|AB|_s$, $|A_1'B_1'|=|A_1B_1|_s$. Поэтому

$$|A_1B_1|_s=\frac{1}{2}|AB|_s. \tag{1}$$

Обозначим величины плоских углов с центром O, опирающихся на катеты AC и BC, через α, и пусть $\overset{\frown}{AOB}=\gamma$. Воспользовавшись сферической теоремой Пифагора, из рассмотрения прямоугольных равнобедренных треугольников ABC и A_1B_1C, учитывая соотношение (1), из которого следует, что $\overset{\frown}{A_1OB_1}=\frac{\gamma}{2}$, получим:

$$\cos\gamma=\cos^2\alpha, \tag{2}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Из равенства (2) следует:

$$1+\cos\gamma=1+\cos^2\alpha,$$

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2}=1+\cos^2\alpha. \tag{4}$$

Из равенства (3) получаем:

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2}=2\cos^4\frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Приравняем правые части равенств (4), (5):

$$1+\cos^2\alpha=2\cos^4\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Как легко проверяется, соотношение (6) выполняется лишь при $\alpha=0°$. Но отсюда сразу следует, что равенство $|A_1B_1|_s=\frac{1}{2}|AB|_s$, которое мы вывели в предположении, что f сохраняет расстояния, выполняться не может. Значит, предпо-

ложение о существовании сохраняющего расстояния отображения f кусочка ω сферы на плоскую фигуру неверно.

Доказанное свойство называют свойством неизгибаемости сферы: в отличие от таких поверхностей, как цилиндрическая или коническая, любой участок сферы нельзя, «изогнув» его, наложить на плоскость. Из теоремы 6 мы сразу получаем, что любое плоское изображение участка земной поверхности неизбежно искажает расстояния. Поэтому, например, измеряя расстояния между точками на карте, нельзя находить расстояние между соответствующими точками земной поверхности — это приводит, как правило, к большим искажениям.

Тем не менее разработанные методы построения карт с успехом решают многие частные задачи. Например, существуют карты, по которым с большой степенью точности можно измерять площади. Как уже говорилось в предыдущем параграфе, при изображении участков сферы в меркаторской проекции сохраняются углы (такие отображения называют конформными). Важным примером конформных отображений является стереографическая проекция.

Возьмем произвольную точку S на сфере и проведем касательную плоскость α к этой сфере через точку S', диаметрально противоположную точке S (рис. 33). Любая прямая SM, где M — произвольная точка сферы, пересекает плоскость α в некоторой точке M'. Отображение, при котором каждой точке M сферы ставится в соответствие указанным способом точка M' плоскости α, есть отображение этой сферы (за исключением точки S) на всю плоскость α (почему?). Это отображение называется стереографической проекцией.

Рассмотрим два основных свойства стереографической проекции.

Теорема 7. ***Образом при стереографической проекции любой окружности, не проходящей через центр S проекции, является окружность.***

Доказательство. Заметим сначала, что для любой точки $M \neq S$ сферы

$$|SM| \cdot |SM'| = 4R^2. \qquad (1)$$

В самом деле (рис. 33),

$\overset{\frown}{SS'M'} = 90°$ ($S'M'$ — касательная к сфере (O, R));

$\overset{\frown}{S'MS} = 90°$ (этот угол опирается на диаметр сферы).

Применяя известное свойство катета прямоугольного треугольника, получим соотношение (1).

Основная идея последующего рассуждения такова. Рассмотрим отображение F всего пространства (за исключением точки S) на себя, при котором образом произвольной точки M является такая точка M' луча SM, что $|SM| \cdot |SM'| = 4R^2$. Если мы докажем, что при этом отображении образом любой сферы, не

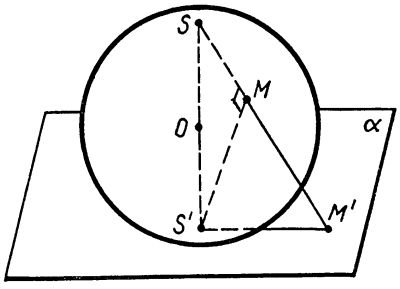

Рис. 33

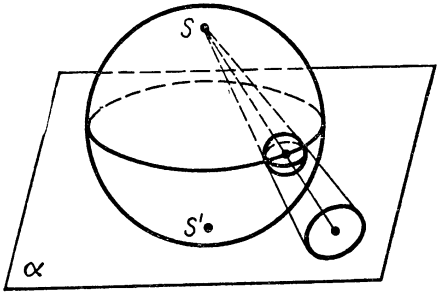

Рис. 34

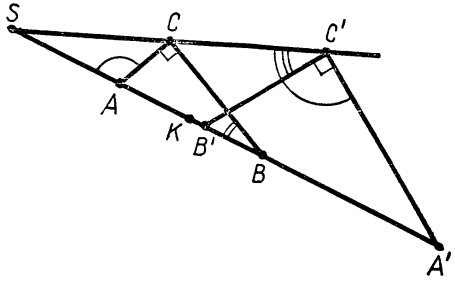

Рис. 35

проходящей через S, является сфера, то теорема будет доказана. Действительно, любая окружность, лежащая на сфере, является пересечением этой сферы с некоторой другой сферой (K, r) (рис. 34). Поэтому образ этой окружности при отображении F есть пересечение образов этих сфер. Но, как уже известно, образ сферы (O, R) без точки S есть плоскость α; а образ сферы (K, r) — некоторая сфера, пересекающая α. Пересечение плоскости и сферы есть окружность, что и требовалось.

Следовательно, осталось доказать, что образ произвольной сферы, не содержащей точки S, есть сфера.

Обозначим точки пересечения прямой SK со сферой (K, r) через A и B, а образы этих точек — через A' и B' (рис. 35). Рассмотрим также произвольную точку C сферы (K, r) и ее образ C'. Отметим, что угол ACB прямой (он опирается на диаметр сферы). По определению отображения F

$$|SA| \cdot |SA'| = |SC| \cdot |SC'|.$$

Отсюда

$$\frac{|SA|}{|SC|} = \frac{|SC'|}{|SA'|}.$$

Следовательно, треугольники SAC и $SA'C'$ подобны (по углу и двум пропорциональным сторонам). Поэтому

$$\overset{\frown}{SAC} = \overset{\frown}{SC'A'}. \qquad (2)$$

Аналогично, рассматривая подобные треугольники SBC и $SB'C'$, получим, что

$$\overset{\frown}{SBC} = \overset{\frown}{SC'B'}. \qquad (3)$$

Но $\overset{\frown}{ACB}=90°$, причем

$$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{SAC}-\overset{\frown}{SBC}$$ (угол A — внешний угол $\triangle ACB$).

Кроме того,

$$\overset{\frown}{B'C'A'}=\overset{\frown}{SC'A'}-\overset{\frown}{SC'B'}.$$

Учитывая соотношения (2) и (3), отсюда получаем:

$$\overset{\frown}{B'C'A'}=90°.$$

Это означает, что образ любой точки сферы (K, r) принадлежит сфере с диаметром $A'B'$. Кроме того, любая точка P найденной сферы с диаметром $A'B'$ является образом некоторой точки P' сферы (K, r) (точки $F(P)$; объясните, почему). Следовательно, образом сферы (K, r) при отображении F является сфера, что и завершает доказательство теоремы.

Свойство стереографической проекции, сформулированное в теореме 7, называют круговым свойством. Докажем теперь свойство конформности.

Теорема 8. ***При стереографической проекции величины углов между кривыми сохраняются.***

Доказательство. Если C — кривая на сфере, а прямая p касается этой кривой в некоторой точке A, то прямая p', проекция прямой p на плоскость α из центра S, касается кривой C', образа кривой C при стереографической проекции в точке A'. Справедливость этого факта можно усмотреть на наглядном примере, поместив в центр S проекции источник света и представив себе кривую C и прямую p изготовленными из проволоки: прямая p' (тень от прямой p) касается C' — тени от кривой C (рис. 36).

Опираясь на это допущение, докажем теорему.

Пусть BA и BC — касательные к кривым, лежащим на сфере (O, R), про-

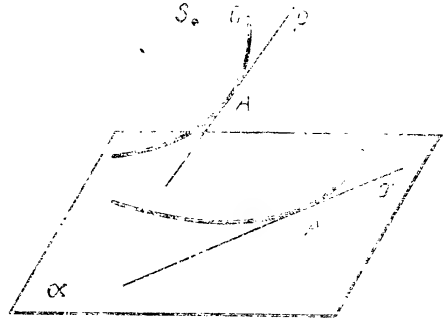

Рис. 36

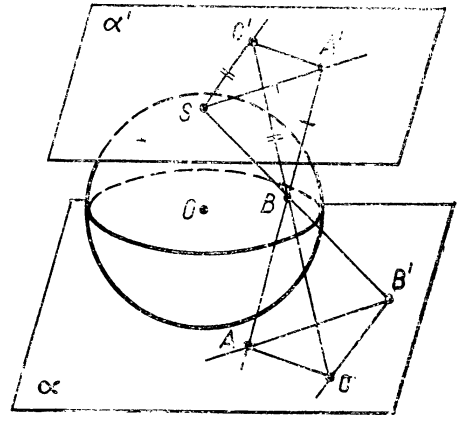

Рис. 37

ходящие через точку B. Удобно считать, что точки A, C являются точками пересечения этих касательных с плоскостью α. Тогда эти прямые касаются и сферы в этой точке. Надо доказать, что угол $AB'C$, полученный при проектировании угла ABC из точки S на плоскость α, конгруэнтен углу ABC.

Проведем плоскость α' через точку S, касающуюся сферы (O, R) в этой точке. Пусть A' и C' — точки пересечения прямых AB и BC с этой плоскостью (рис. 37). Так как плоскости α и α', касающиеся сферы (O, R) в диаметрально противоположных точках S и S', параллельны, то углы $AB'C$ и $C'SA'$ гомотетичны (центр гомотетии — точка B) и, следовательно, конгруэнтны. Кроме того, $\angle ABC \cong \angle C'BA'$ (эти углы вертикальные). Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\angle C'SA' \cong \angle C'BA'.$$

Как известно, отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, конгруэнтны. Поэтому

$$|A'S| = |A'B|, \quad |C'S| = |C'B|.$$

Значит, треугольники $SA'C'$ и $C'BA'$, имеющие три попарно конгруэнтные стороны ($[A'C']$ — общая сторона, см. также соотношения (2) и (3)), конгруэнтны. Отсюда и следует конгруэнтность углов ABC и $AB'C$.

Доказанное свойство конформности стереографической проекции делает ее удобной для применения в картографии. Например, карта, показанная на рисунке 38, выполнена в стереографической проекции (за центр проекции принят южный полюс).

Теорема 8 поможет нам также объяснить, как задается меркаторская проекция. При стереографической проекции глобуса углы сохраняются, но такие локсодромии, как параллели, отображаются не на отрезки, а на окружности. Если теперь удастся подыскать отображение плоскости, сохраняющее углы, а полученную сетку параллелей и меридианов переводящее в прямоугольную сетку, то и второе требование, предъявляемое к навигационным картам (изображение локсодромии — отрезок), также будет выполнено. Такое конформное отображение найдено в теории функций комплексного переменного. Его можно задать следующим образом.

Рассмотрим карту северного полушария, выполненную в стереографической проекции с центром в Южном полюсе. Любую точку M карты можно задать двумя числами: ρ — расстояние от изображения Северного полюса и φ — долгота точки M. Поставим в соответствие точке $M(\rho, \varphi)$ точку $M'(x, y)$ в прямоугольной системе координат:

$$x = \varphi, \quad y = \ln \rho.$$

Как показано в теории функций комплексного переменного, это отображение сохраняет углы. Очевидно, также, что сетка

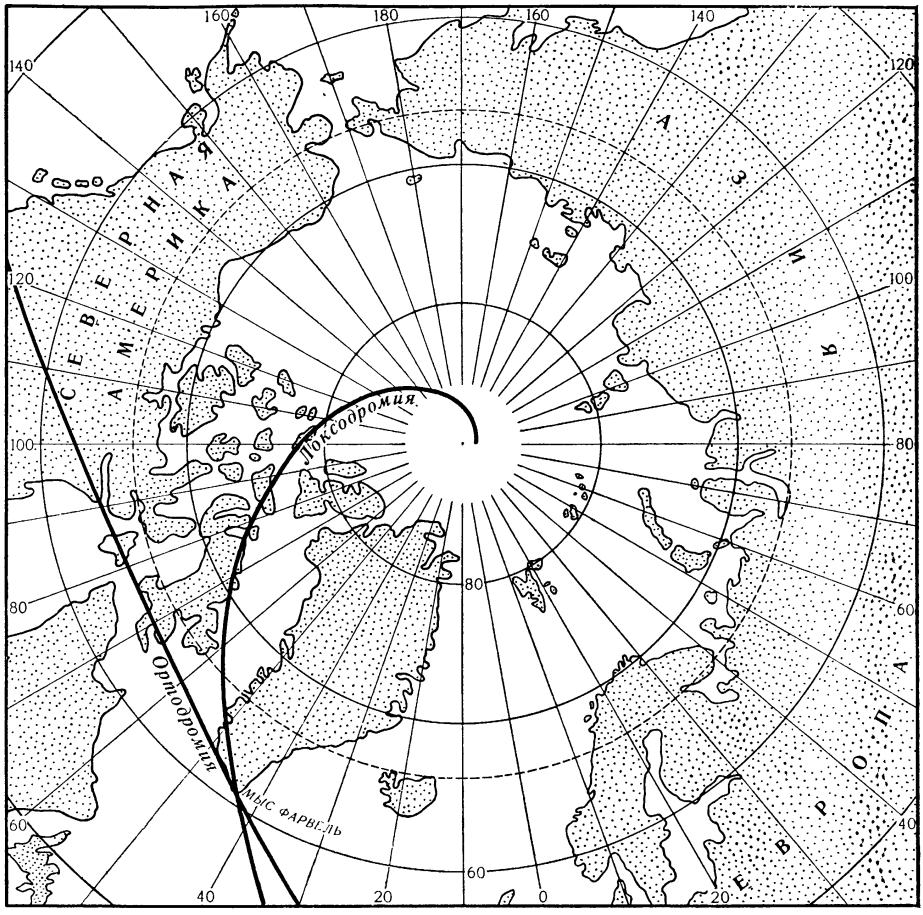

Рис. 38

параллелей ($\rho = \text{const}$) и меридианов ($\varphi = \text{const}$) переходит при этом в прямоугольную сетку, что и требовалось.

Карту, выполненную в меркаторской проекции, можно получить и без предварительного стереографического проектирования. Покажем, например, как изготовить такую карту приэкваториальных областей Земли.

Этот способ основан на том, что цилиндрические поверхности можно развернуть на плоскость. Рассмотрим цилиндр с осью l, касающийся глобуса. Срезав полярные области, можно оставшуюся часть сферы спроектировать из ее центра на поверхность цилиндра. Разрежем цилиндрическую поверхность по образующей и развернем ее на плоскость (рис. 39). Очевидно, что в результате сетка параллелей и меридианов отображается на прямоугольную сетку. Правда, углы при этом не сохраняются, но можно получить и конформное отображение участка сферы на плоскость — меркаторскую проекцию. Этот вид картогра-

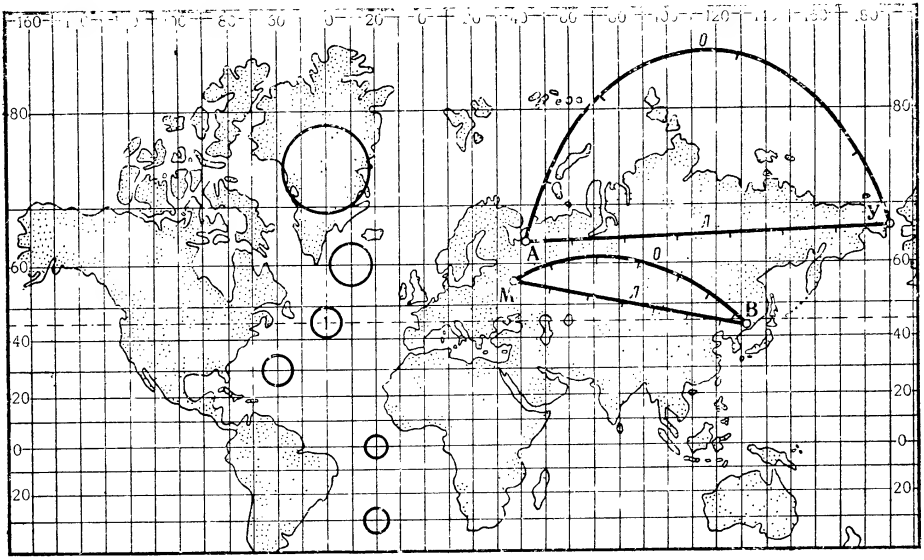

Рис. 39

фических проекций называют также цилиндрической равноугольной проекцией.

Упражнения

36. а) Какой фигурой является ортодромия, изображенная на рисунке 38; б) Достигнет ли Северного полюса самолет, летящий по локсодромии (рис. 38)?

37. Известно, что площадь Гренландии меньше площади Южной Америки. Судя же по рисунку 39, это не так. Как объяснить противоречие?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. См. «Геометрию, 10», задача 226.

2. Точка, две точки, окружность, пустое множество.

3. Нужно воспользоваться свойствами хорд и стягиваемых ими дуг в окружностях одного радиуса.

4. а) Доказательство можно провести методом математической индукции (по n) исходя из неравенства треугольника; б) неверно, см. рис. 40.

5. а) Продолжая по очереди стороны внутреннего многоугольника, будем отсекать от внешнего получающиеся части (1, 2, ..., см. рис. 41). При этом остаются многоугольники все меньших размеров, в конце концов останется внутренний многоугольник.

б) Неверно, рис. 42 показывает, что внутренний многоугольник может иметь сколько угодно большой периметр.

в) Верно, рассуждения из п. а) проходят и в этом случае.

6. Неверно, рассмотрите, например, треугольник на поверхности глобуса, образованный экватором и двумя меридианами.

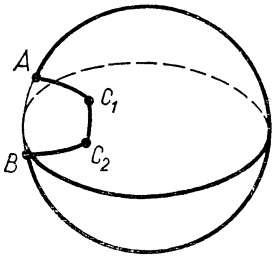

Рис. 40

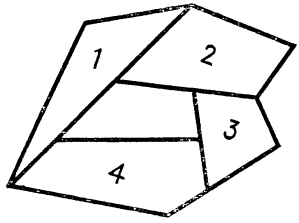

Рис. 41

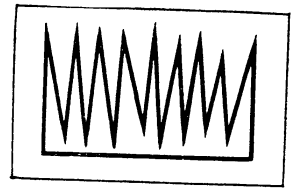

Рис. 42

7. Эта теорема верна за единственным исключением, когда через «полюс» проводится перпендикуляр к «экватору».

8. Верно, это следует из утверждения задачи 3.

9. $r=R\sin\frac{o}{R}$.

10. Взяв три точки A, B и C на сферической окружности с центром Q и построив на плоскости по трем сторонам треугольник ABC, найдем радиус этой окружности r. По отрезку длины r и хорде QA строится диаметр QQ'.

11. Проведем большие окружности с центром в данных точках, их радиусы $R\sqrt{2}$, точки их пересечения — центры искомой окружности.

12. а) и б) — верно.

13. $\gamma=60°$; ответ легко получить без теоремы косинусов, вписав этот угол в куб (рис. 43).

14. $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$.

15. Из определения полярного угла следует, что луч OA перпендикулярен лучам OB^* и OC^*, а поэтому и плоскости OB^*C^*; аналогично $(OB)\perp(OA^*C^*)$, $(OC)\perp(OA^*B^*)$.

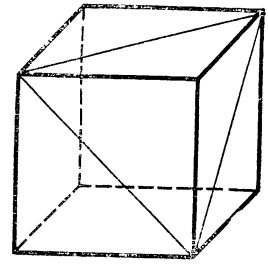

Рис. 43

16. $\alpha^*=\pi-\alpha$, $\beta^*=\pi-\beta$, $\gamma^*=\pi-\gamma$; $\hat{A}^*=\pi-\hat{A}$, $\hat{B}^*=\pi-\hat{B}$, $\hat{C}^*=\pi-\hat{C}$.

17. Нужно воспользоваться формулами приведения.

18. $\pi<\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<3\pi$; для доказательства нужно воспользоваться формулами из задачи 16 и утверждением задачи 15.

19. $((f_3\circ f_2)\circ f_1)(M)=(f_3\circ f_2)(f_1(M))=$
$=f_3(f_2(f_1(M)))=f_3((f_2\circ f_1)(M))=$
$=(f_3\circ(f_2\circ f_1))(M)$.

20. Можно взять $f=S_\alpha$, $g=S_\beta$, где плоскости α и β не перпендикулярны.

21. Композиция является параллельным переносом.

22 и 23. Нужно представить повороты в виде композиций симметрий $S_\alpha\circ S_\beta$ и $S_\beta\circ S_\gamma$ так, чтобы одна из плоскостей симметрии (β) была общей, тогда композиция поворотов записывается как

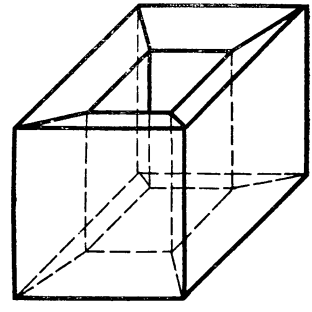

Рис. 44

$$(S_\alpha \circ S_\beta) \circ (S_\beta \circ S_\gamma) = S_\alpha \circ (S_\beta \circ S_\beta) \circ S_\gamma = S_\alpha \circ E \circ S_\gamma = S_\alpha \circ S_\gamma,$$

т. е. будет поворотом относительно прямой, являющейся пересечением плоскостей α и γ. В задаче 22 плоскости α, β, γ перпендикулярны друг другу.

24. а) Фиксированную грань можно отобразить на любую из четырех граней, причем шестью способами, поэтому всего будет 24 перемещения; б) 48 перемещений.

25. Точки пересечения оси k со сферой определяются однозначно тем условием, что они переходят одна в другую при перемещении f, тем самым и плоскость α определяется однозначно.

26. Нужно воспользоваться результатом задачи 16.

27. Максимальное расстояние между точками сферы (O, R) равно $2R$, поэтому преобразований подобия сферы с коэффициентом $k \neq 1$ не существует.

28. Для поверхности, изображенной на рис. 44 («кирпич с дыркой»), где $В=16$, $Р=32$, $Г=16$, будет $В-Р+Г=0 \neq 2$.

29. Нужно воспользоваться тем, что сумма углов n-угольника равна $(n-2)\pi$, а сумма углов при любой вершине внутри внешнего многоугольника равна 2π.

30. Среднее число ребер, приходящееся на грань, равно $n=2Р/Г$. Легко видеть, что $2Р \geqslant 3В$, поэтому $3(Р-В) \geqslant Р$; согласно формуле Эйлера $Р-В=Г-2$, поэтому $3(Г-2) \geqslant Р$, откуда

$$n = \frac{2Р}{Г} \leqslant \frac{6(Г-2)}{Г} = 6 - \frac{12}{Г} < 6.$$

Александр Михайлович Абрамов
Наум Яковлевич Виленкин
Георгий Владимирович Дорофеев
Андрей Александрович Егоров
Александр Николаевич Земляков
Александр Григорьевич Мордкович

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

10 КЛАСС

Редактор Л. М. Котова
Обложка художника Л. А. Константиновой
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Л. М. Абрамова
Корректор Л. П. Михеева

ИБ № 4557

Сдано в набор 29.04.80. Подписано к печати 21.11.80. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнит. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 11,20. Тираж 401 000 экз. Заказ № 3578. Цена 40 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Типография им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли.
Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.